

Nota important: respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts

- 1** Si C és la circumferència $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, calculeu la mitjana sobre C de la funció que dona la distància de cada punt a l'origen.

- (a) $2\pi a$ (b) $\sqrt{2}a$ (c) a *(d) $\frac{4a}{\pi}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Podem descriure C en coordenades polars per $r = g(\theta) = 2a \cos \theta$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, i hem de calcular la mitjana de r , que és la distància de cada punt a l'origen. Primer calculem:

$$\int_C r \, d\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\theta) \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} \, d\theta = 4a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 8a^2,$$

i llavors la mitjana és $\bar{r} = \frac{1}{\text{long}(C)} \int_C r \, d\ell = \frac{4a}{\pi}$.

També ho podem fer a partir de la parametrització $\sigma(t) = (a(1 + \cos t), a \sin t)$, on per simetria és suficient considerar $t \in [0, \pi]$.

- 2** Sigui $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [0, 1]$, la parametrització d'una corba C de $\mathbb{R}^3$ (orientada de $\sigma(0)$ a $\sigma(1)$), de la qual sabem que $x(t) \cdot y(t) = t$ i $z(t) = t+1$. Calculeu $I = \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$, on $\vec{F}(x, y, z) = (yz e^{xy}, xz e^{xy}, 0)$.

[Ind.: Podeu calcular I directament o bé, abans de calcular I , escriure $\vec{F} = \nabla f + \vec{G}$ per una certa funció escalar $f(x, y, z)$ i un camp vectorial de la forma $\vec{G}(x, y, z) = (0, 0, g(x, y, z))$.]

- (a) $I = e + 1$ (b) $I = 2e$ (c) $I = 1 - e$ *(d) $I = e$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Podem escriure $\vec{F} = \nabla(z e^{xy}) + (0, 0, -e^{xy})$, i per tant:

$$I = z(1)e^{x(1)y(1)} - z(0)e^{x(0)y(0)} - \int_0^1 e^{x(t)y(t)} z'(t) dt = 2e - 1 - \int_0^1 e^t dt = 2e - 1 - (e - 1) = e.$$

- 3** Siguin

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0\}, \quad \text{orientada per } \vec{N}_1 = (x, y, z),$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}, \quad \text{orientada per } \vec{N}_2 = (0, 0, -1),$$

i considerem $S = S_1 \cup S_2$. Calculeu el flux de $\vec{F} = (xy, 2yz, z - yz - z^2)$ a través de S .

- (a) 0 (b) $32\pi/3$ (c) 4π *(d) $\pi/6$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Afegim dues tapes per tenir una superfície tancada $\tilde{S} = S \cup T_1 \cup T_2 = \partial W$, on W és un octant d'esfera, definint

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 1, y, z \geq 0\} \quad \text{i vector normal } \vec{N}_3 = (-1, 0, 0),$$

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x^2 + z^2 \leq 1, x, z \geq 0\} \quad \text{i vector normal } \vec{N}_4 = (0, -1, 0).$$

Apliquem el teorema de Gauss, tenint en compte que $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 1$:

$$\int_{\tilde{S}^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \operatorname{vol}(W) = \frac{\pi}{6}.$$

Aleshores,

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \frac{\pi}{6} - \int_{T_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \int_{T_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \frac{\pi}{6} - 0 - 0 = \frac{\pi}{6},$$

on hem usat que el camp $\vec{F}$ és tangent, en cada punt, a les tapes T_1 i T_2 , ja que $\vec{F}(0, y, z) \perp \vec{N}_3$ i $\vec{F}(x, 0, z) \perp \vec{N}_4$.

- 4** Sigui C la corba obtinguda com a intersecció de les superfícies $z = (x-1)^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$. Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (x^3z, yz, 5z^2)$ al llarg de la corba C , orientada de manera que la seva projecció sobre el pla xy es recorri en sentit antihorari.

- (a) $3/2$ (b) $-\pi/3$ *(c) 0 (d) 2π (e) cap de les anteriors

Solució:

La corba C és la vora de la superfície (tros de paraboloides)

$$S = \{(x, y, z) : z = (x-1)^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

que parametritzem com una gràfica, $\Phi(x, y) = (x, y, (x-1)^2 + y^2)$, amb domini $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. El vector normal associat és $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-2(x-1), -2y, 1)$, compatible amb l'orientació demanada per a la vora C . Apliquem el teorema de Stokes, usant que $\operatorname{rot} \vec{F} = (-y, x^3, 0)$, i obtenim:

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D (2(x-1)y - 2x^3y) \, dx \, dy = 0$$

per simetria, ja que la funció a integrar és senar en y , i el domini D és simètric respecte la recta $y = 0$.

- 5** Donat el sistema d'EDOs $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\alpha & 1 \\ 5\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

i un conjunt fonamental de solucions $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ y^{(1)}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x^{(2)}(t) \\ y^{(2)}(t) \end{pmatrix}$, definim $W(t)$ com el determinant wronskià d'aquestes solucions. Suposant que $W(0) > 0$, per a quins valors del paràmetre α podem assegurar que $W(t)$ és una funció estrictament creixent?

- (a) $\alpha < 2$ (b) $\alpha > 0$ *(c) $\alpha < -1$ o $\alpha > 2$ (d) $-1 < \alpha < 2$ (e) cap de les anteriors

Solució:

El wronskià $W(t)$ de les solucions $\mathbf{X}^{(1)}(t)$, $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ compleix la fórmula de Liouville: $W(t) = W(0) e^{(\operatorname{tr} A)t}$, on sabem que $W(0) > 0$, i tenim $\operatorname{tr} A = \alpha^2 - \alpha - 2$, que és positiva si $\alpha < -1$ o $\alpha > 2$.

- 6** Considerem el sistema lineal al pla donat per la matriu $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors del paràmetre a tenim un node impropï?

- *(a) $a = -1$ (b) $a < 0$ (c) $a = \pm 1$ (d) $a > 1$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Per tenir un node impropï, la traça, determinant i discriminant de la matriu han de complir: $T \neq 0$, $D > 0$, $\Delta = 0$ i cal imposar, a més, que la matriu no diagonalitzi. En el nostre cas, tenim $T = a^2 + 1$, $D = a^2$, $\Delta = (a^2 + 1)^2 - 4a^2 = (a^2 - 1)^2$. Per tant, només per a $a = \pm 1$ tenim un node amb un valor propi doble. Però la matriu diagonalitza si $a = 1$ (de fet és diagonal), i no diagonalitza si $a = -1$, únic cas en què tindrem un node impropï (repulsor).

- 7** El sistema no lineal
$$\begin{cases} x' = (y-1)(x-2) \\ y' = (x-1)(2-x) \end{cases}$$
 té el punt $(1,1)$ com a punt d'equilibri. Què podem dir de la seva estabilitat?
- [Ind.: Podeu provar si $V(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ és adequada com a funció de Lyapunov.]
- (a) inestable (b) atractor *(c) estable no atractor (d) no ho podem determinar
(e) cap de les anteriors

.....

Solució:

El mètode de linealització no decideix, ja que la matriu del sistema linealitzat $DF(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspon a un centre (valors propis $\pm i$). Usant la funció $V(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ (que és definida positiva en $(1,1)$) com a funció de Lyapunov obtenim, com a derivada temporal, $W(x,y) = \langle \nabla V(x,y), F(x,y) \rangle \equiv 0$. Per tant, $V(x,y) \equiv \text{const}$ és una quantitat conservada i el punt $(1,1)$ és estable no atractor (un centre no lineal).

- 8** Considerem el problema següent, corresponent a una corda vibrant infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = 2c \cos x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sabem que podem escriure la solució com a superposició de dues ones que viatgen amb velocitat c , en sentits oposats: $u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct)$. Quines són les funcions $p(x)$ i $q(x)$?

- (a) $p(x) = \sin x$, $q(x) = 0$ *(b) $p(x) = \frac{3}{2} \sin x$, $q(x) = -\frac{1}{2} \sin x$
(c) $p(x) = \frac{1}{2} \cos x$, $q(x) = -\frac{3}{2} \sin x$ (d) $p(x) = 0$, $q(x) = \frac{1}{2} \cos x$
(e) cap de les anteriors

.....

Solució:

Apliquem la fórmula de D'Alembert amb les condicions inicials $f(x) = \sin x$ i $g(x) = 2c \cos x$, amb la primitiva $G(x) = \int g(x) dx = 2c \sin x$. Obtenim $u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct)$, essent

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}G(x) = \frac{3}{2} \sin x, \\ q(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}G(x) = f(x) - p(x) = -\frac{1}{2} \sin x. \end{aligned}$$

9 Sabem que els nombres $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$, són valors propis del problema de valors a la frontera (PVF) homogeni $y'' = \lambda y$, $y(0) = y'(0)$, $y(\pi) = y'(\pi)$. Si $y_n(x)$ és funció pròpia associada a cada valor propi λ_n , quin és el valor del quocient $y_n(\pi)/y_n(0)$?

- (a) $1/n$ (b) $(-1)^n n$ (c) n * (d) $(-1)^n$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Fent $\lambda = -n^2$, $n \geq 1$, la solució general de l'EDO $y'' = -n^2 y$ és $y(x) = A \cos nx + B \sin nx$, i tenim $y'(x) = -nA \sin nx + nB \cos nx$. Les condicions de frontera ens donen, totes dues, una mateixa igualtat: $A = Bn$. Obtenim doncs, com a funcions pròpies, les funcions $y_n(x) = n \cos nx + \sin nx$ (o qualsevol múltiple), les quals compleixen $y_n(\pi)/y_n(0) = (-1)^n$.

[Nota: A més dels valors propis $\lambda_n = -n^2$, el PVF té un valor propi addicional $\lambda^* = 1$, amb la funció pròpia $y^*(x) = e^x$.]

10 Considerem el problema següent,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \cos 3x \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quin és el valor de la solució $u(x, t)$ per a $x = \frac{\pi}{3}$ i $t = \frac{\pi}{6}$?

- * (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{\pi}{4}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Prescindint inicialment la condició no homogènia i aplicant separació de variables $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, obtenim els problemes

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

El primer és un PVF, que té els valors propis $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 0$, amb les funcions pròpies $X_n(x) = \cos nx$. Llavors, per al segon problema obtenim $T_n(t) = \sin nt$. Els modes normals són $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \cos nx \cdot \sin nt$, $n \geq 0$. Veiem fàcilment que $u_3(x, t)$ satisfà la condició no homogènia que havíem suprimit, però multiplicada per 3. Per tant, la solució és $u(x, t) = \frac{1}{3} u_3(x, t)$, amb $u(\pi/3, \pi/6) = -1/3$.