

Nota important: respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts

- 1** Sigui C la intersecció del paraboloid $z = x^2 + y^2$ amb el pla $-2y + z = 3$, orientada al punt $p = (0, 3, 9)$ segons el vector tangent $(1, 0, 0)$. Calculeu la circulació $\oint_{C^+} y dx + z dy + x dz$.

(a) 3π *(b) -4π (c) 4π (d) -3π (e) cap de les anteriors

Solució:

Observem que C es la frontera de la superfície S , consistent en la part del pla limitada pel paraboloid:

$$S = \{(x, y, z) : -2y + z = 3, z \geq x^2 + y^2\} = \{(x, y, z) : -2y + z = 3, x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}.$$

L'orientació de S compatible amb C ve definida pel vector normal unitari $\mathbf{N} = (0, 2, -1)/\sqrt{5}$ al pla π . Apliquem el teorema de Stokes: per al camp vectorial $\mathbf{F} = (y, z, x)$, tenim $\text{rot } \mathbf{F} = (-1, -1, -1)$, i aleshores

$$I = \oint_{C^+} y dx + z dy + x dz = \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS = \int_S \frac{-1}{\sqrt{5}} dS = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \text{Area}(S).$$

D'altra banda, com que la projecció de S sobre el pla $z = 0$ és el disc $D = \{x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$, tenim $|\langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle| = 1/\sqrt{5}$ $\text{Area}(S) = \text{Area}(D)/|\langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle| = \sqrt{5} \cdot 4\pi$, i finalment $I = -4\pi$.

- 2** Considerem la part de l'astroide $y^{2/3} + z^{2/3} = 1$ que es troba en el semiplà definit per $x = 0, y \geq 0$, i la fem girar al voltant de l'eix z . Calculeu l'àrea de la superfície obtinguda.

(a) $14\pi/5$ *(b) $12\pi/5$ (c) $10\pi/3$ (d) $13\pi/3$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Anomenem C el tros d'astroide i el parametritzem per $\sigma(t) = (0, \cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tenim $\|\sigma'(t)\| = 3|\cos t \cdot \sin t|$. Llavors, per a la superfície de revolució S obtinguda tenim:

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_C y dl = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \cdot 3|\sin t \cdot \cos t| dt = 12\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \cdot \sin t dt = \frac{12\pi}{5}.$$

- 3** Calculeu l'àrea de la porció del pla $y = z$ continguda dins de l'el·lipsoide sòlid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

(a) $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ *(b) $\frac{\pi\sqrt{2} abc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (c) πabc (d) $\frac{\pi abc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Podem parametritzar la porció de pla S com una gràfica: $z = f(x, y) = y$, amb $(x, y) \in D$, on el domini ve donat per

$$D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} \leq 1 \right\} = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 c^2 / (b^2 + c^2)} \leq 1 \right\},$$

que és una el·lipse de semieixos a i $bc/\sqrt{b^2 + c^2}$. Per tant,

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \sqrt{2} \cdot \text{Area}(D) = \sqrt{2} \cdot \pi a \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

[Nota: A l'última igualtat hem usat que l'àrea d'una el·lipse és igual al producte dels semieixos multiplicat per π . Això també pot obtenir-se usant coordenades polars adaptades.]

- 4** Considerem el camp vectorial $\vec{F} = (1+x, 1+y, 1+z)$, i sigui S la superfície definida per les quatre cares del tetràedre de vèrtexs $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$, orientada segons la normal exterior al tetràedre sòlid. Quant val $I = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$?

*(a) $I = 1/2$ (b) $I = 3$ (c) $I = 3/2$ (d) $I = 0$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Sumem els fluxos sobre les quatre cares C_1, C_2, C_3, C_4 de S . Tres són triangles rectangles, tots ells d'àrea $1/2$, que estan contingudes en plans coordenats: $C_1 \subset \{x=0\}$, $C_2 \subset \{y=0\}$ i $C_3 \subset \{z=0\}$. La quarta cara, $C_4 \subset \{x+y+z=1\}$, és un triangle equilàter d'àrea $\sqrt{3}/2$ (costats de longitud $\sqrt{2}$, altura $\sqrt{3}/2$). Per a la cara C_1^+ , el vector normal unitari és $\vec{N} = (-1, 0, 0)$ i per tant $F_N = \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle = -(1+x) = -1$. El flux corresponent és $I_1 = F_N \cdot \text{Area}(C_1) = -1/2$. Anàlogament, els fluxos a través de C_2^+ i C_3^+ són $I_2 = I_3 = -1/2$. Finalment, el vector normal unitari a la cara C_4 és $\vec{N} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ i per tant $F_N = \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle = (3+x+y+z)/\sqrt{3} = 4/\sqrt{3}$. El flux corresponent és $I_4 = F_N \cdot \text{Area}(C_4) = 2$. El resultat final és $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 1/2$.

[Nota: Alternativament es pot aplicar el teorema de Gauss, usant que la divergència del camp vectorial és constant, $\text{div } \vec{F} = 3$, i llavors només cal multiplicar-la pel volum del tetràedre sòlid que, via Cavalieri, és $1/6$.]

- 5** Donada l'EDO de primer ordre $x' = x(x+1)(x-1)^2$, esbrineu si els seus punts d'equilibri són: estables (E), inestables (I), atractors (A), repulsors (R).

- (a) el punt -1 és R, el punt 0 és A, i el punt 1 és I no R
 (b) el punt -1 és R, el punt 0 és A, i el punt 1 és E no A
 *(c) el punt -1 és A, el punt 0 és R, i el punt 1 és I no R
 (d) el punt -1 és A, el punt 0 és R, i el punt 1 és E no A
 (e) cap de les anteriors

Solució:

Els zeros de la funció $f(x) = x(x+1)(x-1)^2$ són els punts d'equilibri: $-1, 0$ i 1 . Deduïm la seva estabilitat estudiant el signe de f als diferents intervals:

- * $f(x) > 0$ si $x < -1$;
 * $f(x) < 0$ si $-1 < x < 0$;
 * $f(x) > 0$ si $0 < x < 1$ o $x > 1$.

Obtenim que el punt -1 és atractor (també podem usar que $f'(-1) < 0$), el punt 0 és repulsor (també podem usar que $f'(0) > 0$), i que el punt 1 és inestable no repulsor (com que és degenerat, no podem usar $f'(1) = 0$).

- 6** Donat el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

podem dir que les solucions:

- *(a) estan contingudes a les rectes $y = x + C$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, C)$
 (b) estan contingudes a les rectes $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$
 (c) estan contingudes a les rectes $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (C, C^2)$
 (d) estan contingudes a les rectes $y = x + C$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (C, 2C)$
 (e) cap de les anteriors

Solució:

El sistema lineal és un cas degenerat, on la matriu del sistema té valors propis 0 i 2 i vectors propis $v_1 = (0, 1)$ i $v_2 = (1, 1)$, respectivament. Per tant, les òrbites estan contingudes a les rectes de vector director v_2 , és a dir, de la

forma $y = x + C$, $C \in \mathbb{R}$, amb l'eix y com a recta de punts d'equilibri. Com que el valor propi no nul és positiu, resulta que $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, C)$.

- 7** Donada una funció $f(t)$, trobeu la solució del PVI $\begin{cases} x'' = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ [Ind.: variació de constants.]

- (a) $\int_0^t (t-s)f(s) ds$ (b) $\int_0^t s f(s) ds$ (c) $\int_0^t (t+s)f(s) ds$ (d) $t \int_0^t f(s) ds$
 (e) cap de les anteriors

Solució:

La solució general de la part homogènia és $x_h(t) = c_1 + c_2 t$, i per tant $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat. Aplicant el mètode de variació de constants, trobem una solució particular $x_p(t) = u_1(t) + u_2(t)t$ resolent el sistema $\Phi(t) \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$, que ens dóna $u_1'(t) = -tf(t)$, $u_2'(t) = f(t)$. i per tant podem escollir $u_1(t) = -\int_0^t s f(s) ds$, $u_2(t) = \int_0^t f(s) ds$. Amb això obtenim $x_p(t) = \int_0^t (t-s)f(s) ds$, que ja satisfà les condicions inicials de l'enunciat. [Nota: També és possible comprovar directament quina de les opcions satisfà el PVI.]

- 8** Considereu el sistema d'EDOs al pla

$$\begin{cases} x' = -(x^2 + y^2)(y + f(x, y)), \\ y' = (x^2 + y^2)(x + g(x, y)), \end{cases}$$

on les funcions f i g són les que s'indica en cada cas. Si apliquem el mètode de Lyapunov amb $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, podem garantir que el punt d'equilibri $(0, 0)$ és:

- (a) inestable si $f = x$, $g = -y^3$ *(b) estable si $f = y + xy^2$, $g = x$
 (c) atractor si $f = xy$, $g = x^2$ (d) estable si $f = y$, $g = -x$
 (e) cap de les anteriors

Solució:

Calculem

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y' = (x^2 + y^2)(-x f(x, y) + y g(x, y)).$$

Lavors:

- * si $f = xy$, $g = x^2$, llavors $W \equiv 0$ i $(0, 0)$ és estable no atractor;
- * si $f = x$, $g = -y^3$, llavors $W = -(x^2 + y^2)(x^2 + y^4)$ és definida negativa i $(0, 0)$ és atractor;
- * si $f = y + xy^2$, $g = x$, llavors $W = -x^2 y^2 (x^2 + y^2)$ és semi-definida negativa i podem garantir que $(0, 0)$ és estable (pot ser atractor o no);
- * si $f = y$, $g = -x$, llavors $W = -2xy(x^2 + y^2)$ té canvis de signe entorn de $(0, 0)$ i no podem decidir res.

9 Donada $u(x, t)$ solució del problema

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

considereu la funció $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u(x, t)^2 dx$, i calculeu $E'(t)$.

- (a) $-k^2 \int_0^L u(x, t)^2 dx$ (b) 0 *(c) $-k^2 \int_0^L u_x(x, t)^2 dx$ (d) $-k^2 \int_0^L u(x, t) u_x(x, t) dx$
(e) cap de les anteriors

.....

Solució:

Primer usem que $u(x, t)$ és solució de l'EDP, després integrem per parts i finalment apliquem les condicions de contorn:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L u(x, t) u_t(x, t) dx = k^2 \int_0^L u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= k^2 \left[u(x, t) u_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_x(x, t)^2 dx \right] = -k^2 \int_0^L u_x(x, t)^2 dx. \end{aligned}$$

10 Sigui $u(x, y)$ la solució del següent problema al quadrat $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$, consistent en l'equació de Laplace

amb condicions de contorn de Dirichlet:
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \\ u(x, \pi) = \sin x \end{cases}$$

Quant val $u(\pi/2, \pi/2)$?

[Ind.: $\cosh a = (e^a + e^{-a})/2$, $\sinh a = (e^a - e^{-a})/2$, $\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a$, $\sinh(2a) = 2 \sinh a \cdot \cosh a$]

- (a) $\sinh(\pi/2)$ *(b) $\frac{1}{2 \cosh(\pi/2)}$ (c) $\frac{\sinh \pi}{2}$ (d) $\frac{2}{\sinh(\pi/2)}$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució:

Suprimint la darrera condició de contorn (la no homogènia) i aplicant separació de variables $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, obtenim el PVF $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$, més l'EDO $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$ amb la condició $Y(0) = 0$. El PVF té com a valors propis $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$, i les funcions pròpies associades són $X_n(x) = \sin nx$. Substituint a l'altra EDO i imposant la condició corresponent, obtenim $Y_n(y) = \sinh ny$. Amb això obtenim els modes

normals $u_n(x, y) = \sin nx \cdot \sinh ny$, i qualsevol sèrie convergent $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x, y)$ és també solució del problema

homogeni. Imposant ara la condició no homogènia $u(x, \pi) = \sin x$ que havíem suprimit, obtenim $d_1 = 1/\sinh \pi$ i $d_n = 0$ per a $n \geq 2$. Amb això, la solució és $u(x, y) = \sin x \cdot \frac{\sinh y}{\sinh \pi}$, i per tant $u(\pi/2, \pi/2) = \frac{\sinh(\pi/2)}{\sinh \pi} = \frac{1}{2 \cosh(\pi/2)}$.
