

EXAMEN DE RE-AVALUACIO EQS DIFERENCIALS, ETSEIB (7 Juliol 2016)

1. Si una superfície ve donada en coordenades cilíndriques (r, θ, z) per l'equació $z = h(r, \theta)$, llavors el seu element de superfície és:

a) $dS = \sqrt{h_r^2 + r^2(1 + h_\theta^2)} dr d\theta$

b) $dS = \sqrt{r^2 + h_r^2 + h_\theta^2} dr d\theta$

c) $dS = r\sqrt{1 + h_r^2 + h_\theta^2} dr d\theta$

d) $dS = \sqrt{r^2(1 + h_r^2) + h_\theta^2} dr d\theta$

- e) Cap de les anteriors

Solució: d)

Prenem la parametrització $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, h(r, \theta))$ i calculem $\|\varphi_r \wedge \varphi_\theta\|$

2. Sigui $C \subset \mathbb{R}^3$ una corba qualsevol que va del punt $A = (0, 0, 0)$ al punt $B = (1, 1, 1)$.

Sigui $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + y^2z, x - z + 2xyz, xy^2 - y)$. Llavors:

a) $\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = -1$

b) $\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 1$

c) $\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 0$

d) $\int_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 3$

- e) Cap de les anteriors

Solució: b)

$\mathbf{F} = \text{grad} f$ amb $f(x, y, z) = xy + xy^2z - yz$ i apliquem el teorema de Newton-Leibnitz.

3. Considerem el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - xy, -y, yz)$ i la frontera de la regió

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq e^{x^2+y^2}, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

orientada per la seva normal exterior. Llavors:

a) $\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \pi(e^4 - e)$

b) $\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \pi(e^2 - e)$

c) $\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 2\pi(e^4 - e)$

d) $\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 2\pi(e^2 - e)$

- e) Cap de les anteriors

Solució: a) Apliquem el Teorema de Gauss i calculem la integral triple en coordenades cilíndriques.

$$\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W \text{div} \mathbf{F} = \text{Vol}(W) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{e^{r^2}} r dz dr d\theta = \pi(e^4 - e)$$

4. Calculeu la massa de la superfície $x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$ si la densitat a cada punt és $\rho(x, y, z) = 1/z$.

a) $\pi\sqrt{2}/2$

b) $2\pi\sqrt{2}$

c) $3\pi\sqrt{2}$

d) $\pi\sqrt{2}$

- e) Cap de les anteriors

Solució: b) Prenent la parametrització $\varphi(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$, amb $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [1, 2]$, es té $dS = \|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = |z|\sqrt{2}$

$$m(S) = \int_S \frac{1}{z} dS = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{2} dz d\theta = 2\pi\sqrt{2}$$

5. Sigui $u(x, t)$ la solució de la següent equació d'ones per a una corda de longitud infinita:

$$u_{tt} = u_{xx} + t \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Digueu quant val $u(x, t)$ en el punt $(x, t) = (1, 1)$.

[Ind.: trobeu primer una solució de l'EDP no homogènia de la forma $v(x, t) = (At+b) \cdot e^x$ i després feu el canvi de funció $w = u - v$.]

a) $-e + e^2$

b) $-e + \sinh(2)$

c) $-e - \sinh(2)$

d) $-e + \cosh(2)$

e) Cap de les anteriors

Solució: d)

Una solució particular de l'edp no homogènia $u_{tt} = u_{xx} + t \cdot e^x$ és $v(x, t) = -t \cdot e^x$. Si fem $w = u - v$, llavors $w(x, t)$ verifica l'edp homogènia següent:

$$w_{tt} = w_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad w(x, 0) = e^{-x}, \quad w_t(x, 0) = e^x.$$

Per la fórmula de D'Alembert tenim:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} (e^{-x-t} + e^{-x+t}) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} e^s ds = \frac{1}{2} (e^{-x-t} + e^{-x+t}) + \frac{1}{2} (e^{x+t} - e^{x-t}),$$

d'on $u(1, 1) = v(1, 1) + w(1, 1) = -e + \cosh(2)$.

6. Sigui $u(x, t)$ la solució del següent problema per a l'equació de la calor 1-dimensional:

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \sin(2x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Per a quin $t > 0$ la funció $u(x, t)$ pren el valor $1/e$ si l'avaluem en el punt $(x, t) = (\frac{\pi}{4}, t)$?
[Ind.: la solució $u(x, t)$ només té un mode normal].

a) $t = 1$ b) $t = 2$ c) $t = 1/2$ d) Per a cap valor de t e) Cap de les anteriors

Solució: c)

Les solucions en variables separades de l'edp homogènia auxiliar:

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

són de la forma $u(x, t) = c \cdot X(x) \cdot T(t)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, on X i T verifiquen:

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad T' = \frac{\lambda}{2} T.$$

Si volem solucions $X \neq 0$, cal agafar $\lambda = \lambda_n = -n^2$, $X(t) = X_n(t) = \sin(nx)$ i $T(t) = T_n(t) = e^{-n^2 t/2}$, $n \geq 1$. Clarament, la solució de l'edp plantejada a l'enunciat correspon a una d'aquestes solucions en variables separades. Concretament, és $u(x, t) = u_2(x, t) = c \cdot e^{-2t} \sin(2x)$ pel valor de $c = 1$. Per tant, $u(\pi/4, t) = e^{-2t}$ que val $1/e = e^{-1}$ per $t = 1/2$.

7. Indiqueu l'estabilitat dels punts d'equilibri de l'equació diferencial $x' = x(x - 3)^2$.

a) $x_1 = 0$ repulsor, $x_2 = 3$ inestable no repulsor

- b) $x_1 = 0$ repulsor, $x_2 = 3$ repulsor
- c) $x_1 = 0$ atractor, $x_2 = 3$ atractor
- d) $x_1 = 0$ atractor, $x_2 = 3$ estable no atractor
- e) Cap de les anteriors

Solució: a).

Els punts d'equilibri (0 i 3) són els zeros de la funció $f(x) = x(x-3)^2$. D'una banda tenim $f'(0) = 9 > 0$ i deduïm que el 0 és repulsor. Per a l'altre punt tenim $f'(3) = 0$ i per tant la linealització no decideix. Però com que $f(x)$ és positiva per a $0 < x < 3$ i també per a $x > 3$, resulta que el 3 és atractor per l'esquerra i repulsor per la dreta. En conjunt, podem dir que el 3 és inestable no repulsor.

8. Considereu a $\mathbb{R}^2$ el sistema lineal homogeni de matriu $A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ a-4 & 2 \end{pmatrix}$, essent $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Trobeu els valors de a per als quals el sistema és un focus, esbrinant si és atractor o repulsor.
- a) $0 < a < 4$, i és repulsor
 - b) $0 < a < 4$, i és atractor
 - c) $a > 4$, i és repulsor
 - d) $a < 0$, i és atractor
 - e) Cap de les anteriors

Solució: a)

La traça, el determinant i el discriminant del sistema són $T = a$, $D = a$ i $\Delta = T^2 - 4D = a^2 - 4a = a(a-4)$ respectivament. Per a tenir un focus, cal $D > 0$, $\Delta < 0$ i $T \neq 0$. Això s'acompleix per a $0 < a < 4$, i com que $T > 0$ el focus és repulsor.

9. Indiqueu l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri del sistema d'equacions diferencials següent:

$$\begin{cases} x' = xy^2 - x^3, \\ y' = -3x^2y - y^3. \end{cases}$$

[Ind.: Podeu usar una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, amb α i β adequades.]

- a) repulsor
- b) inestable no repulsor
- c) estable no atractor
- d) atractor
- e) Cap de les anteriors

Solució: d)

El sistema correspon al camp vectorial $F(x, y) = (xy^2 - x^3, -3x^2y - y^3)$, i té l'origen com a punt d'equilibri. El sistema linealitzat a l'origen ve donat per la matriu $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, i no decideix. Apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, amb $\alpha, \beta > 0$ per tal que sigui definida positiva. Calculem:

$$W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle = (2\alpha - 6\beta)x^2y^2 - (2\alpha x^4 + 2\beta y^4).$$

Escollint $\alpha = 3$ i $\beta = 1$, obtenim $W(x, y) = -(6x^4 + 2y^4)$, que és definida negativa a l'origen i per tant l'origen és un punt d'equilibri atractor.

10. La solució del PVI $x' = Ax$, $x(0) = x_0$

amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avaluada en $t = 2$ val

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \\ e^{-2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} e^2 \\ 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} e^{-2} \\ 0 \\ e^2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2} \\ e^2 \end{pmatrix}$ e) cap de les anteriors

Solució: b)

La solució del PVI és $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ i avaluada en $t = 2$ dona b).