

Re-avaluació d'Eqs diferencials, ETSEIB, Perm. A

8 de Juliol de 2015, temps: 2 hores

1. El canvi $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ transforma les condicions de frontera mixtes no homogènies $u(0, t) = f(t)$ y $u_x(L, t) = g(t)$ en les condicions de frontera mixtes homogènies $w(0, t) = 0$ y $w_x(L, t) = 0$ quan:
 - a) $v(x, t) = xf(t) + (x/L - 1)g(t)$.
 - b) $v(x, t) = (x/L - 1)^2 f(t) + xg(t)$.
 - c) $v(x, t) = (x - 1)^2 f(t) + (x/L)g(t)$.
 - d) $v(x, t) = (x/L - 1)^2 f(t) + x^2 g(t)$.
 - e) Cap de les anteriors.

Solució: b)

Imposant $w(0, t) = 0 = u(0, t) - v(0, t) = f(t) - v(0, t)$, $w_x(L, t) = 0 = u_x(L, t) - v_x(L, t) = g(t) - v_x(L, t)$, es té $v(0, t) = f(t)$, $v_x(L, t) = g(t)$ (satisfeta per b))

2. Sigui $X(x)$ i $T(t)$ tals que $u(x, t) = X(x)T(t)$ és solució de l'equació $u_{tt} + u_t - u_{xx} + u = 0$. Llavors $X(x)$ i $T(t)$ satisfan les equacions diferencials lineals :
 - a) $T''(t) + T'(t) + (1 + \lambda)T(t) = 0$ y $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, per certs $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - b) $T''(t) + T'(t) + (1 - \lambda)T(t) = 0$ y $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, per certs $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - c) $T''(t) + \lambda T(t) = 0$ y $X''(x) - X'(x) - (1 + \lambda)X(x) = 0$, per certs $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - d) $T''(t) + \lambda T(t) = 0$ y $X''(x) - X'(x) + (\lambda - 1)X(x) = 0$, per certs $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - e) Cap de les anteriors.

Solució: a)

$XT'' + XT' - X''T + XT = 0$, és a dir, $\frac{X''}{X} = \frac{T'' + T' + T}{T} = -\lambda$

3. Sigui C la corba que s'obté com a la intersecció de las superfícies $z = x^2$ i $x^2 + y^2 = 4$. Calculeu l'integral

$$\int_C z dx + x dy + y dz.$$

Nota: la corba està orientada de tal manera que la coordenada z es creixent al primer quadrant.

- a) 4π
- b) -2π
- c) -4π
- d) 0
- e) Cap de les anteriors.

Solució: c)

Considerem primer la corba

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4 \cos^2 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aleshores,

$$\int_{\gamma} z dx + x dy + y dz = -8 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt + 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt = 4\pi,$$

ja que la primera i la tercera integral son zero.

Finalment, notem que no hem orientat la corba de la manera indicada, aleshores, el resultat correcte es -4π .

4. El cilindre $x^2 + y^2 = x$ divideix la superfície de l'esfera unitària (de centre l'origen i radi 1) en dues superfícies S_1 , S_2 , on S_1 és a dins del cilindre i S_2 fora. Calculeu el quocient de les àrees $A(S_2)/A(S_1)$.

- a) $(2\pi + 3)/(2\pi - 3)$
- b) $(2\pi + 6)/(2\pi - 3)$
- c) $(\pi + 4)/(\pi - 2)$
- d) $(\pi + 2)/(\pi - 2)$
- e) Cap de les anteriors.

Solució: d) La superfície de mitja esfera vé donada en forma de gràfica per $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x, y)$. L'element de superfície és, doncs,

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Sigui

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}.$$

Aleshores, passant a polars,

$$A(S_1) = 2 \int_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} r dr d\theta = 2\pi - 4.$$

Com que l'àrea total de l'esfera es 4π , $A(S_2) = 2\pi + 4$, i el quotient és $A(S_2)/A(S_1) = (2\pi + 4)/(2\pi - 4)$.

5. Considereu el sistema

$$\begin{cases} x' &= xy - x^3(1 - xy) \\ y' &= -x^2 \end{cases}$$

Quina de les següents afirmacions és certa:

- a) L'origen és un repulsor
- b) L'origen és un atractor.
- c) L'origen és inestable però no repulsor.
- d) L'origen és estable però no atractor.
- e) Cap de les anteriors.

(Hint: useu $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ i mireu si hi ha altres punts d'equilibri)

Solució: d) Prenem com a funció de Liapunov $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, llavors $W(x, y) = -x^4(1 - xy)$

que és semi-definida negativa. Finalment, observem que l'eix OY és una recta de punts crítics.

Per tant, l'origen és estable però no és atractor.

6. Donat el sistema lineal homogeni amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1+b \end{pmatrix}.$$

que depen dels paràmetres a i b

Una condició suficient per a que el sistema sigui un node impropri inestable és:

- a) $b = 0$ i $a = 1$.
- b) $b = -1$ i $a = 0$.
- c) $b = -3$ i $a = -2$.
- d) $b = 1$ i $a = 2$.
- e) Cap de les anteriors

Solució: d) Apliquem el criteri traça-determinant: $T = a + b + 1$, $D = a + ab$ i $\Delta = (b - a + 1)^2$. Per tant:

- a) és un node propi inestable.
- b) és un cas degenerat.
- c) és un node impropri estable.
- d) és la que busquem. Un node impropri inestable.

7. Calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{F} = (0, 0, 1)$ a través de la superfície de revolució S obtinguda en girar, al voltant de l'eix z , la corba del pla $y = 0$ donada per $x = f(z) \geq 0$, $a \leq z \leq b$. Supposeu que S està orientada per la normal exterior.

- (a) $\pi(f(a)^2 - f(b)^2)$
- (b) $\frac{1}{2}(f'(b) - f'(a))$
- (c) $\frac{\pi}{2}(f(a)f'(a) - f(b)f'(b))$
- (d) $\frac{1}{3}(f(b)^2 f'(b) - f(a)^2 f'(a))$
- (e) Cap de les anteriors

Solució: a)

La superfície S admet la parametrització $\Phi(\theta, z) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z)$, $(\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [a, b]$, amb vector normal $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, -f(z)f'(z))$. Aleshores, el flux és

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle F(\Phi(\theta, z)), \Phi_\theta \wedge \Phi_z \rangle d\theta dz = -2\pi \int_a^b f(z)f'(z) dz = \pi(f(a)^2 - f(b)^2).$$

8. Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del problema de valors inicials

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\mu^2 - \mu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Per a quins valors de μ la solució tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $\mu < 0$ i $\mu = 2$ (b) $\mu = 2$ (c) $\mu > 0$ i $\mu = -2$ (d) $\mu = -2$ (e) Cap de les anteriors

Solució: a)

La matriu té com a valors propis -1 i μ , amb vectors propis $(1, \mu)$ i $(0, 1)$ respectivament. Per a $\mu < 0$, tenim un node atractiu i tota solució tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$. Per a $\mu \geq 0$, podem tenir un sistema degenerat (si $\mu = 0$) o bé una sella (si $\mu > 0$). En ambdós casos, la solució només pot tendir a $(0, 0)$, quan $t \rightarrow \infty$, si la condició inicial $(1, 2)$ és un vector propi de valor propi negatiu, és a dir, de valor propi -1 , la qual cosa només es compleix per a $\mu = 2$.

9. Sigui $\mathbf{F} = (xy^2, y + x, 0)$. Calculeu el flux del $\text{rot}\mathbf{F}$ a través de la superfície S plana limitada en el pla xy , $x \geq 0$, $y \geq 0$ per les corbes $y = x^2$ i $y = x$. Suposeu S orientada pel vector $(0, 0, 1)$.
- (a) $1/6$
 - (b) $-1/6$
 - (c) $1/12$
 - (d) $-1/12$
 - (e) Cap de les anteriors

Solució: c)

O bé es calcula $\text{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 1 - 2xy)$ i calculem el flux directament

$$\text{flux} = \int_0^1 \int_{x^2}^x (1 - 2xy) dy dx = 1/12$$

o bé pel teorema de Stokes (amb $C = \delta S$)

$$\text{flux} = \int_S \langle \text{rot}\mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{l} \rangle = 1/12$$

10. Sigui $S = S_1 \cup S_2$ amb $S_1 = x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, i $S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$. Calculeu el flux de $\mathbf{F} = (y, x, z - 1)$ a través de S orientada per la normal interior.
- (a) $-2\pi/3$
 - (b) $5\pi/6$
 - (c) $3\pi/4$
 - (d) $-3\pi/2$
 - (e) Cap de les anteriors

Solució: a)

Pel teorema de la divergència afegint la tapa T definida per $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ i orientada per $(0, 0, 1)$, tenim

$$\begin{aligned} \text{flux} &= - \int_W \text{div}\mathbf{F} dx dy dz - \int_T \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) - \int_T \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \\ &= \frac{-5\pi}{3} - \int_{x^2+y^2 \leq 1} \langle (y, x, -1), (0, 0, 1) \rangle dx dy = -\frac{5\pi}{3} + \pi = -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$