

EDPs: preguntes de test i qüestions curtes

Equacions Diferencials

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Equip docent d'Equacions Diferencials

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

[A] Evolució d'integrals

1. Ex. Final 23-24 Q2 [t4]

Considerem el problema següent per a l'equació de Poisson amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2xy - x, & x \in (0, 2\pi), \quad y \in (0, \pi), \\ u_y(x, 0) = \pi x^2, & x \in (0, 2\pi), \\ u_y(x, \pi) = 0, & x \in (0, 2\pi), \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, & y \in (0, \pi). \end{cases}$$

Donada una solució $u(x, y)$, definim la funció $F(x) = \int_0^\pi u_x(x, y) dy$. Calculeu $F'(\pi/2)$.

- (a) π^2 (b) $\pi^2(2\pi - 1)$ (c) $\frac{\pi}{2}(\pi - 1)$ (d) $2\pi(\pi + 1)$ *(e) $\frac{\pi^2}{4}(3\pi - 2)$
(f) cap de les anteriors

2. Ex. Final 23-24 Q1 [q3]

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema
$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2 - 2, & 0 < x < 3, \\ u(0, t) = -2, & t > 0, \\ u(3, t) = 7, & t > 0. \end{cases}$$

Definint la funció $G(t) = \int_0^3 (u(x, t))^2 dx$, calculeu $G'(0)$.

Resposta: $G'(0) = 48$

3. Ex. Final 22-23 Q2 [q3]

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema
$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = 2, & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i considerem la funció $F(t) = \int_0^\pi u(x, t) u_t(x, t) dx$. Calculeu la derivada $F'(0)$. [Ind.: Pot ser útil la integració per parts en algun moment. No és necessari que trobeu $u(x, t)$ explícitament.]

Resposta: -5π

4. Reav. 22-23 [t9]

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació de la calor 1D no homogènia amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 3 \sin(3x), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 5 - \cos(2x), & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = a, & t > 0, \\ u_x(\pi, t) = -a & t > 0. \end{cases}$$

Determineu el valor de a pel qual la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$ es manté constant.

[Ind.: no cal trobar la solució $u(x, t)$, trebal·leu amb $T'(t)$.]

- (a) $a = 0$ (b) $a = 4/3$ *(c) $a = 1/4$ (d) $a = 2/3$ (e) cap de les anteriors

5. **Ex. Final 22-23 Q1 [t7]**

Considerem el problema següent, que correspon a l'equació de calor amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = a + \sin^2 t - e^{x^2} \cos t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) = \sin t - \cos^2 t, & t > 0, \\ u_x(1, t) = 2 + \sin 3t, & t > 0, \end{cases}$$

on $u_0(x)$ és una funció donada, i $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu el valor de a per al qual la temperatura mitjana

$T(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$ és una funció 2π -periòdica. [Ind.: comenceu calculant $T'(t)$.]

- *(a) $a = -3$ (b) $a = 0$ (c) $a = 2$ (d) $a = 4$ (e) cap de les anteriors

6. **Ex. Final 21-22 Q2 [q4]**

Considereu el problema següent, associat a l'equació d'ones

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 2x^3 - 3Lx^2, & x \in (0, L), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, L), \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $u(x, t)$ n'és solució, calculeu la seva mitjana: $h(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$. [Ind.: Comenceu calculant $h''(t)$. No cal que trobeu $u(x, t)$ explícitament.]

Resposta: $h(t) = -\frac{L^3}{2}$ (és constant)

7. **Ex. Final 21-22 Q1 [q3]**

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació de la calor no homogènia amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \frac{1}{1+t}, & x \in (0, 3), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 5 - \cos(15\pi x), & x \in (0, 3), \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(3, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Calculeu la funció temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{3} \int_0^3 u(x, t) dx$. [Ind.: no cal trobar la solució $u(x, t)$, n'hi ha prou treballant amb $T'(t)$ i $T(t)$.]

Resposta: $T(t) = 5 + \ln(1+t)$

8. **Reav. 20-21 [t9]**

Considereu el següent problema, corresponent a l'equació de la calor amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 2), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3x^2, & x \in (0, 2), \\ u_x(0, t) = t^2, & t > 0, \\ u_x(2, t) = 4t + 12, & t > 0. \end{cases}$$

Trobeu l'instant $t^* > 0$ en què la temperatura mitjana $T(t)$ assoleix el màxim absolut. [Ind.: Comenceu calculant $T'(t)$.]

- (a) $t^* = 2$ (b) mai (c) $t^* = 12$ *(d) $t^* = 6$ (e) cap de les anteriors

9. **Ex. Final 20-21 Q1 [t6]**

Considerem l'equació de la calor 1D per a una barnilla, $u_t - u_{xx} = 0$, $x \in (0, 2)$, $t > 0$, amb temperatura inicial $u(x, 0) = 0$ i condicions de contorn $u_x(0, t) = -4t$, $u_x(2, t) = 3t^2$. Calculeu la temperatura mitjana $T(t)$ de la barnilla a l'instant $t = 3$. [Ind.: calculeu primer $T'(t)$.]

- *(a) $45/2$ (b) $27/2$ (c) 15 (d) 9 (e) cap de les anteriors

10. **Ex. Final 19-20 Q2 [t1]**

Sigui $u(x, t)$ una funció tal que
$$\begin{cases} u_t - 6u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_x(1, t) = \frac{1}{(1+t)^2}, & t \geq 0, \end{cases}$$

Si definim la funció $T(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$, calculeu l'increment $T(1) - T(0)$ i digueu a quin dels intervals següents

es troba. [Ind.: calculeu $T'(t)$ sense necessitat de trobar la solució.]

- (a) $\frac{3}{2} \leq T(1) - T(0) < \frac{5}{2}$ *(b) $\frac{5}{2} \leq T(1) - T(0) < \frac{7}{2}$
(c) $\frac{7}{2} \leq T(1) - T(0) < \frac{9}{2}$ (d) $\frac{9}{2} \leq T(1) - T(0) < \frac{11}{2}$
(e) $\frac{11}{2} \leq T(1) - T(0) < \frac{13}{2}$ (f) cap de les anteriors

11. **Ex. Final 18-19 Q2 [q3]**

Considereu el següent problema de calor 1D no homogeni, amb condicions de contorn de Neumann constants

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2x - L & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L), \\ u_x(0, t) = -a, & t > 0, \\ u_x(L, t) = a, & t > 0, \end{cases}$$

essent $f(x)$ una funció donada, i a una constant positiva. Si $T(t)$ és la temperatura mitjana a l'interval $(0, L)$ i a l'instant t , justifiqueu si creix, decreix o es conserva.

Resposta:

12. **Ex. Final 18-19 Q1 [t5]**

Sigui $u(x, t)$ una solució de l'equació de la calor no homogènia $u_t - u_{xx} = 2x$ per a $x \in (0, \pi)$, $t > 0$. En quin cas podem assegurar que la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$ és creixent?

- *(a) $u_x(\pi, t) - u_x(0, t) > -\pi^2$ (b) $u_x(0, t) + u_x(\pi, t) > \pi$
(c) $u(\pi, t) - u(0, t) > 2\pi^2$ (d) $u(0, t) + u(\pi, t) > -2\pi$
(e) cap de les anteriors

13. **Reav. 16-17 [t9]**

Donada $u(x, t)$ solució del problema $\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$

considereu la funció $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u(x, t)^2 dx$, i calculeu $E'(t)$.

- (a) $-k^2 \int_0^L u(x, t)^2 dx$ (b) 0 *(c) $-k^2 \int_0^L u_x(x, t)^2 dx$ (d) $-k^2 \int_0^L u(x, t) u_x(x, t) dx$
(e) cap de les anteriors

[B] Fórmula de D'Alembert

14. **Reav. 23-24 [t9]**

Donat el problema $\begin{cases} u_{tt} - \pi^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin(2x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$

calculeu el valor de la solució $u(x, t)$ per a $(x, t) = (\pi, 3/2)$.

- (a) $-\frac{1}{\pi}$ (b) $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) 1 *(e) $\frac{1}{\pi}$ (f) cap de les anteriors

15. **Ex. Final 23-24 Q1 [t4]**

Considereu el problema següent per a l'equació d'ones amb una corda infinita, $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos(2x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Quin valor té la solució a la posició $x = \pi/2$ i temps $t = \pi/8$?

- *(a) $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ (b) $\frac{2\sqrt{2}+1}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $-\frac{1}{2}$ (f) cap de les anteriors

16. **Ex. Final 22-23 Q2 [t5]**

Considerem el següent problema per a l'equació d'ones de la corda infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = (48t - 32t^3)e^{-x}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 2 + \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sabent que l'EDP té $u_p(x, t) = 8t^3 e^{-x}$ com a una solució particular de l'EDP, trobeu el valor de la solució $u(x, t)$ del problema, quan $x = \pi$ i $t = \pi/2$.

- (a) $\pi^3 e^{-\pi} - \frac{\pi}{2}$ (b) $\pi^3 e^{-\pi} + \frac{3\pi}{2}$ *(c) $\pi^3 e^{-\pi} + \pi$ (d) $\pi^3 e^{-\pi}$ (e) $\pi^3 e^{-\pi} - \pi$
(f) cap de les anteriors

17. **Ex. Final 22-23 Q1 [t8]**

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent per a l'equació d'ones amb domini infinit,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = (tx^2 - t^3 - 2x)e^{-tx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 1 + \cos x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Sabent que $u_p(x, t) = t e^{-tx}$ és una solució particular de l'EDP, trobeu el valor de $u(\pi/3, \pi/3)$.

- (a) $\pi(2 - e^{-\pi^2/9})$ (b) $e^{-\pi^2/9}$ (c) $2\pi + \sqrt{3}e^{-\pi^2/9}$ *(d) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}e^{-\pi^2/9}$ (e) cap de les anteriors

18. **Reav. 21-22 [t9]**

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, que correspon a l'equació d'ones per a una corda vibrant infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 4 \cos 2x, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{9} \cos 2x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculeu $u(\pi/2, \pi/6)$. [Ind.: comenceu trobant una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP (que no depengui de t) i, escrivint $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t)$, plantegeu el nou problema per a $v(x, t)$.]

- (a) $-\frac{1 + \arctan \pi}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\arcsin \frac{2}{3}$ *(d) $\frac{\arctan \pi}{6} - \frac{1}{9}$ (e) cap de les anteriors

19. **Ex. Final 21-22 Q1 [t5]**

Calculeu $u(x, \pi/3)$ per a la solució del problema següent, corresponent a l'equació d'ones en una corda infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 4, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) $\frac{2\pi}{3} + \cos x$ (b) $\frac{2\pi}{3} - \sin x$ *(c) $\frac{4\pi}{3} - \cos x$ (d) $\frac{4\pi}{3} + \sin x$ (e) cap de les anteriors

20. **Ex. Final 20-21 Q2 [t5]**

Donat el següent problema de valors inicials per a l'equació d'ones a tota la recta,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

calculeu el valor de $u(1, 1)$.

- (a) $1/10$ (b) $-1/10$ *(c) $1/5$ (d) $2/5$ (e) cap de les anteriors

21. **Ex. Final 20-21 Q1 [t7]**

Sigui $u(x, t)$ la solució de la següent equació d'ones per a una corda de longitud infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 4t^2 \cos x, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Digueu quan val $u(0, \pi)$. [Ind.: Trobeu primer una solució particular de l'EDP no homogènia de la forma $u_p(x, t) = (At^2 + B) \cos x$ i després feu el canvi de funció $w = u - u_p$.]

- (a) $\pi^2/2$ *(b) π^2 (c) $4\pi^2 - 16$ (d) $2\pi^2 - 8$ (e) cap de les anteriors

22. **Ex. Final 19-20 Q2 [t2]**

Signi $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a una corda vibrant infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 2x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 15\pi \sin(\pi x/2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculeu $u(1, 1)$.

- (a) 10 (b) 30 (c) 58 (d) 110 (e) 6 (f) 132 (g) cap de les anteriors

23. **Ex. Final 17-18 Q2 [t5]**

Signi $u(x, t)$ la solució de
$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = 1, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quin és el valor de $u(0, 1)$?

- (a) 0 (b) 6/5 (c) 1 (d) -1 (e) cap de les anteriors

24. **Reav. 17-18 [t8]**

Considerem el problema següent, corresponent a una corda vibrant infinita,
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & t \in \mathbb{R}. \\ u_t(x, 0) = 2c \cos x, \end{cases}$$

Sabem que podem escriure la solució com a superposició de dues ones que viatgen amb velocitat c , en sentits oposats: $u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct)$. Quines són les funcions $p(x)$ i $q(x)$?

- (a) $p(x) = \sin x, \quad q(x) = 0$ (b) $p(x) = \frac{3}{2} \sin x, \quad q(x) = -\frac{1}{2} \sin x$
 (c) $p(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad q(x) = -\frac{3}{2} \sin x$ (d) $p(x) = 0, \quad q(x) = \frac{1}{2} \cos x$
 (e) cap de les anteriors

25. **Ex. Final 17-18 Q1 [t5]**

Signi $u(x, t)$ la solució del problema següent per a una corda infinita,
$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \end{cases}$$

amb $x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$. Trobeu el valor de $u(0, 1/3)$.

- (a) $\pi/12$ (b) $\pi/18$ (c) $\pi/6$ (d) $\pi/3$ (e) cap de les anteriors

26. **Reav. 15-16 [t5]**

Signi $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a l'equació d'ones amb una corda de longitud infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = e^{-x}, & t \in \mathbb{R}. \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

Digueu quant val $u(x, t)$ al punt $(x, t) = (1, 1)$. [Ind.: Trobeu primer una solució de l'EDP no homogènia de la forma $v(x, t) = (At + b)e^x$, i després feu el canvi de funció $w = u - v$.]

- (a) $-e + e^2$ (b) $-e + \sinh 2$ (c) $-e - \sinh 2$ (d) $-e + \cosh 2$ (e) cap de les anteriors

[C] Separació de variables en l'equació d'ones

27. **Ex. Final 23-24 Q2 [q3]**

Trobeu la solució del problema
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sabent que és de la forma $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.

Resposta: $u(x, t) = \sin x \cdot (\cos t + \sin t)$

28. **Reav. 23-24 [t10]**

Signi $u(x, t)$ la solució del problema següent per a l'equació d'ones amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ u_t(x, 0) = 2 \cos(3x) + \cos(5x), & x \in (0, \pi/2), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi/2, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trobeu el valor de $u(0, \pi/2)$.

- (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ *(c) $-\frac{7}{15}$ (d) $-\frac{3}{5}$ (e) $\frac{5}{6}$ (f) cap de les anteriors

29. **Reav. 22-23 [t10]**

Signi $u(x, t)$ la solució del problema següent per a l'equació d'ones homogènia amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 1 + \cos(5x), & x \in (0, \pi/2), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi/2, t) = 1, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trobeu la funció $u_t(0, t)$ (derivada temporal a l'extrem $x = 0$). [Ind.: busqueu una solució particular estacionària $u_p(x)$ de l'EDP i que satisfaci també les condicions de contorn, i plantegeu el problema per a $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$.]

- (a) 0 (b) $1 - \sin(5t)$ *(c) $-5 \sin(5t)$ (d) $1 + \cos(5t)$ (e) cap de les anteriors

30. **Ex. Final 21-22 Q2 [t5]**

Considereu l'EDP $u_{tt} + bu_t - c^2 u_{xx} = 0$, que correspon al moviment d'una corda vibrant on hem suposat un esmorteïment proporcional a la velocitat (amb una constant de proporcionalitat $b > 0$). Suposem que busquem solucions per separació de variables, de la forma $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Si la funció $X(x)$ és solució d'una EDO $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, digueu de quina EDO ha de ser solució la funció $T(t)$.

- (a) $T''(t) + bT'(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$ (b) $T''(t) + b\lambda T'(t) - c^2 T(t) = 0$
 *(c) $T''(t) + bT'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0$ (d) $T''(t) + b\lambda T'(t) + c^2 T(t) = 0$
 (e) cap de les anteriors

31. **Reav. 21-22 [t10]**

Trobeu el valor de $u(\pi/2, \pi/2)$ per a la solució $u(x, t)$ del problema següent, associat a l'equació d'ones amb condicions de contorn de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = 2 \sin 2x + 3 \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) 5 (b) -2 *(c) 1 (d) 0 (e) cap de les anteriors

32. **Reav. 20-21 [t10]**

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació d'ones amb condicions mixtes,

$$\begin{cases} u_{tt} - 16 u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{5x}{2}, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u_x(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sabent que la solució és de la forma $u(x, t) = T(t) \cdot \sin \frac{5x}{2}$, trobeu la funció $T(t)$.

- (a) $T(t) = \cos 10t$ (b) $T(t) = \frac{1}{5} \sin 5t$ *(c) $T(t) = \frac{1}{10} \sin 10t$ (d) $T(t) = \cos 5t$
 (e) cap de les anteriors

33. **Reav. 19-20 [t5]**

Calculeu $u(1/2, 1/4)$ per a la solució $u(x, t)$ del problema següent,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 2 \sin(3\pi x), & 0 < x < 1, \\ u_t(x, 0) = \sin(5\pi x), & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) $\frac{1}{6\pi}$ *(b) $\frac{1}{10\pi}$ (c) $\frac{1}{14\pi}$ (d) $\frac{1}{18\pi}$ (e) $\frac{1}{22\pi}$ (f) cap de les anteriors

34. **Ex. Final 19-20 Q1 [q3]**

Trobeu la funció $T(t)$ per a la qual $u(x, t) = \cos(\pi x) T(t)$ és una solució del següent problema d'ones 1D,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u_t(x, 0) = \cos(\pi x), & x \in (0, 1), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Resposta: $T(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)$

35. **Reav. 18-19 [t10]**

Trobeu els modes normals $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ del problema homogeni

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, 2\pi), & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 2\pi), \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) $u_n(x, t) = \sin(nx) \cdot \sin(nt)$, $n \geq 1$ (b) $u_n(x, t) = \cos(nx) \cdot \sin(nt/2)$, $n \geq 0$
 *(c) $u_n(x, t) = \sin(nx/2) \cdot \sin(nt/2)$, $n \geq 1$ (d) $u_n(x, t) = \sin(nx/2) \cdot \cos(nt)$, $n \geq 1$
 (e) cap de les anteriors

36. **Reav. 14-15 [t2]**

Siguin $X(x)$ i $T(t)$ tals que $u(x, t) = X(x) T(t)$ és solució de l'equació $u_{tt} + u_t - u_{xx} + u = 0$. Quines equacions diferencials lineals satisfan les funcions $X(x)$ i $T(t)$?

- *(a) $T'''(t) + T'(t) + (1 + \lambda)T(t) = 0$ i $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, per a certs $\lambda \in \mathbb{R}$
 (b) $T''(t) + T'(t) + (1 - \lambda)T(t) = 0$ i $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, per a certs $\lambda \in \mathbb{R}$
 (c) $T''(t) + \lambda T(t) = 0$ i $X''(x) - X'(x) - (1 + \lambda)X(x) = 0$, per a certs $\lambda \in \mathbb{R}$
 (d) $T''(t) + \lambda T(t) = 0$ i $X''(x) - X'(x) + (\lambda - 1)X(x) = 0$, per a certs $\lambda \in \mathbb{R}$
 (e) cap de les anteriors

[D] Separació de variables en l'equació de la calor

37. **Ex. Final 22-23 Q2 [q4]**

Trobeu la solució $u(x, t)$ del problema següent,

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{4} u_{xx} = \sin(2x), & x \in (0, \pi), & t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2x) + 2 \sin(3x), & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: busqueu una solució particular estacionària $u_p(x)$ de l'EDP i que satisfaci també les condicions de contorn, i plantegeu el problema per a $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$.]

Resposta: $\sin(2x) + 2e^{-9t/4} \sin(3x)$

38. **Ex. Final 21-22 Q2 [t6]**

Siguin $u(x, t)$ la solució del problema següent, associat a l'equació de la calor amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), & t > 0, \\ u(x, 0) = 4x + \cos 2x, & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 4, & t > 0. \end{cases}$$

Trobeu el valor de $u(\pi/2, 1)$. [Ind.: Trobeu una solució estacionària $u_0(x)$ de l'EDP que també satisfaci les condicions de contorn i, fent el canvi $u(x, t) = u_0(x) + v(x, t)$, plantegeu el nou problema per a $v(x, t)$.]

- (a) $\pi - e^{-2}$ *(b) $2\pi - e^{-4}$ (c) $\pi + e^{-4}$ (d) $2\pi + e^{-2}$ (e) cap de les anteriors

39. **Ex. Final 20-21 Q2 [q3]**

Considerem el següent problema per a l'equació de la calor,
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

on la funció $f(x)$ ve expressada com una sèrie de sinus $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, on suposem coneguts els coeficients b_n . Si expressem la solució del problema com una sèrie $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$, trobeu les funcions $G_n(t)$.

Resposta: $G_n(t) = b_n e^{-n^2 t}$

40. **Ex. Final 20-21 Q1 [t8]**

Considerem el següent problema de calor amb condicions de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + 3 \cos x, & x \in (0, 2\pi), \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Si $u(x, t)$ és la solució, trobeu el valor de $u(\pi, 1)$.

- (a) $1 + 3e^{-4}$ *(b) $1 - 3e^{-1}$ (c) $1 - 3e^{-9}$ (d) $1 - 3e^{-4}$ (e) cap de les anteriors

41. **Reav. 19-20 [t6]**

Donat el problema
$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3x + 1, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

escrivim la solució com una superposició de modes normals, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n T_n(t) \cdot \sin nx$, on escollim les funcions $T_n(t)$ de manera que $T_n(0) = 1$. Calculeu el coeficient d_7 .

- (a) $\frac{6\pi + 4}{3\pi}$ (b) $\frac{2\pi + 8}{5\pi}$ *(c) $\frac{6\pi + 4}{7\pi}$ (d) $\frac{2\pi + 8}{9\pi}$ (e) cap de les anteriors

42. **Reav. 18-19 [t9]**

Considereu l'equació de la calor 1D amb condicions de contorn de Neumann homogènies,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Apliquem el mètode de separació de variables, escrivint $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Llavors haurem de resoldre les EDOs $X'' - \lambda X = 0$ i $T' - \lambda T = 0$. Quines condicions addicionals caldrà imposar?

- (a) $X'(-\pi) = X'(\pi) = 0$, $T(0) = 0$
 *(b) $X'(-\pi) = X'(\pi) = 0$, sense cap condició sobre $T(0)$
 (c) $X(-\pi) = X(\pi) = 0$, sense cap condició sobre $T(0)$
 (d) $X(-\pi) = X(\pi) = 0$, $T(0) = f(x)$
 (e) cap de les anteriors

43. **Reav. 17-18 [t10]**

Considerem el problema següent,
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \cos 3x, & t \in \mathbb{R}. \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & \end{cases}$$

Quin és el valor de la solució $u(x, t)$ per a $x = \pi/3$ i $t = \pi/6$?

- *(a) $-1/3$ (b) $1/2$ (c) $\pi/4$ (d) 0 (e) cap de les anteriors

44. **Reav. 15-16 [t6]**

Sigui $u(x, t)$ la solució del següent problema per a l'equació de la calor 1-dimensional,

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(x, 0) = \sin(2x), & t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \end{cases}$$

Per a quin $t > 0$ tenim $u(\pi/4, t) = 1/e$? [Ind.: la solució $u(x, t)$ només té un mode normal.]

- (a) $t = 1$ (b) $t = 2$ *(c) $t = 1/2$ (d) per a cap valor de t (e) cap de les anteriors

[E] Separació de variables en l'equació de Laplace/Poisson

45. *Ex. Final 19-20 Q2 [t4]*

Sigui $u(x, y)$ la solució del següent problema al rectangle $\Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, consistent en l'equació de Laplace amb condicions de contorn mixtes:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_y(x, 0) = u_y(x, 2\pi) = 0 \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \cos y \end{cases}$$

Calculeu $u(\pi/2, \pi)$. [Ind.: $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$.]

- (a) $-\frac{1}{2 \cosh(\pi/2)}$ (b) $\frac{1}{2 \cosh \pi}$ (c) $-\frac{1}{2 \cosh 2\pi}$ (d) $\frac{1}{2 \cosh 4\pi}$ (e) cap de les anteriors

46. *Reav. 16-17 [t10]*

Sigui $u(x, y)$ la solució del següent problema al quadrat $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$, consistent en l'equació de Laplace amb condicions de contorn de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \\ u(x, \pi) = \sin x \end{cases}$$

Quant val $u(\pi/2, \pi/2)$?

[Ind.: $\cosh a = (e^a + e^{-a})/2$, $\sinh a = (e^a - e^{-a})/2$, $\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a$, $\sinh(2a) = 2 \sinh a \cdot \cosh a$.]

- (a) $\sinh(\pi/2)$ (b) $\frac{1}{2 \cosh(\pi/2)}$ (c) $\frac{\sinh \pi}{2}$ (d) $\frac{2}{\sinh(\pi/2)}$ (e) cap de les anteriors

[F] Diversos EDPs

47. *Ex. Final 20-21 Q2 [t4]*

El canvi de funció $v(x, t) = u(x, t) - e^{2(t-1)}$ transforma el problema (1) en el problema (2):

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4e^{2(t-1)}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 2e^{-2}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quins són els valors de $h(0, 0)$, $f(0)$ i $g(0)$?

- (a) $h(0, 0) = 0$, $f(0) = -e^{-2}$, $g(0) = 2e^{-2} - 1$ (b) $h(0, 0) = 0$, $f(0) = e^{-2}$, $g(0) = 1 - 2e^{-2}$
(c) $h(0, 0) = -e^{-2}$, $f(0) = e^{-2}$, $g(0) = 2e^{-2} - 1$ (d) $h(0, 0) = e^{-2}$, $f(0) = 0$, $g(0) = e^2$
(e) cap de les anteriors

48. *Ex. Final 19-20 Q2 [t3]*

Considerem el problema següent per a l'equació de la calor no homogènia,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 4 \cos \frac{x}{3}, & 0 < x < 6\pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 4x + \frac{x}{2} & 0 < x < 6\pi, \\ u_x(0, t) = u_x(6\pi, t) = 4, & t > 0. \end{cases}$$

Per homogeneïtzar-la, escollim una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP que també satisfaci les condicions de contorn i que, a més, compleixi $u_p(0) = 0$. Escrivint $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t)$, quina és la condició inicial per a la nova funció incògnita $v(x, t)$?

- (a) $2 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) + \cos \frac{3x}{4}$ (b) $3 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) + \cos \frac{3x}{4}$
(c) $\frac{9}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{3}\right) + \cos \frac{x}{2}$ (d) $9 \left(1 - \cos \frac{x}{3}\right) + \cos \frac{x}{2}$
(e) $\frac{3}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) + \cos \frac{3x}{4}$ (f) $\frac{3}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{3}\right) + \cos \frac{x}{2}$
(g) cap de les anteriors

49. *Ex. Final 19-20 Q1 [t6]*

Sigui $u(x, t)$ una solució de l'EDP de calor 1D $u_t = k^2 u_{xx}$, on $x \in (0, 1)$ i $t \geq 0$, tal que la temperatura inicial és $u(x, 0) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$. Què podem dir sobre el creixement o decreixement, respecte t , de la temperatura a l'instant $t = 0$, als punts $x = 1/4$ i $x = 3/4$?

- (a) es manté constant en $x = 1/4$ i $x = 3/4$ (b) inicialment creix en $x = 1/4$ i decreix en $x = 3/4$
 *(c) inicialment decreix en $x = 1/4$ i creix en $x = 3/4$ (d) inicialment decreix en $x = 1/4$ i $x = 3/4$
 (e) cap de les anteriors

50. **Ex. Final 18-19 Q2 [t5]**

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a una corda vibrant infinita amb fricció,

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = \sin t + \cos x, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = -5 \cos x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trobeu l'acceleració inicial $u_{tt}(x, 0)$. [Ind.: no cal usar la fórmula de D'Alembert.]

- (a) $\sin x$ *(b) $4 \cos x$ (c) $-3 \cos x$ (d) 0 (e) cap de les anteriors

51. **Reav. 17-18 [t9]**

Sabem que els nombres $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$, són valors propis del problema amb valors a la frontera (PVF) homogeni

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(0), \quad y(\pi) = y'(\pi).$$

Si $y_n(x)$ és funció pròpia associada a cada valor propi λ_n , quin és el valor del quocient $y_n(\pi)/y_n(0)$?

- (a) $1/n$ (b) $(-1)^n n$ (c) n *(d) $(-1)^n$ (e) cap de les anteriors

52. **Reav. 14-15 [t1]**

Trobeu $v(x, t)$ per tal que el canvi $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ transformi les condicions de frontera mixtes no homogènies $u(0, t) = f(t)$ i $u_x(L, t) = g(t)$ en les condicions de frontera mixtes homogènies $w(0, t) = 0$ i $w_x(L, t) = 0$.

- (a) $v(x, t) = x f(t) + (x/L - 1) g(t)$ *(b) $v(x, t) = (x/L - 1)^2 f(t) + x g(t)$
 (c) $v(x, t) = (x - 1)^2 f(t) + (x/L) g(t)$ (d) $v(x, t) = (x/L - 1)^2 f(t) + x^2 g(t)$
 (e) cap de les anteriors
-