

EDOs: preguntes de test i qüestions curtes

Equacions Diferencials

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Equip docent d'Equacions Diferencials

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

[A] Conceptes i teoremes generals sobre sistemes d'EDOs

1. *Ex. Final 23-24 Q2 [t1]*

Considerem l'EDO $x' = x^3(x^2 - 4)(x + 3)$. Quina és l'estabilitat dels punts -2 , 0 i 2 com a punts d'equilibri?
(A = atractor, R = repulsor, I = inestable).

- | | |
|--|--------------------------------|
| (a) -2 és A, 0 és I no R, 2 és R | (b) -2 és A, 0 i 2 són R |
| * (c) 0 és A, ± 2 són R | (d) -2 i 0 són A, 2 és R |
| (e) ± 2 són A, 0 és R | (f) cap de les anteriors |

2. *Reav. 23-24 [t5]*

Considerem el sistema d'EDOs $x' = x(x - 2)^5$, $y' = y(y - 2)^3$, amb la condició inicial $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. Trobeu el límit de la solució $(x(t), y(t))$ quan $t \rightarrow +\infty$.

- * (a) $(0, 0)$ (b) no existeix (c) $(2, 0)$ (d) $(0, 2)$ (e) $(2, 2)$ (f) cap de les anteriors

3. *Ex. Final 23-24 Q1 [t1]*

Si $x(t)$ és la solució de l'EDO $x' = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 4)^2 \sin x$ amb la condició inicial $x(0) = 5/2$, quin és el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $-\pi$ (b) 1 (c) 0 (d) 2 * (e) π (f) cap de les anteriors

4. *Ex. Final 22-23 Q2 [t1]*

Considereu l'EDO $x' = x^3(x - 1)^2$ amb una condició inicial $x(0) = x_0$. Per a quins valors de x_0 tenim $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$?

- * (a) $x_0 = 0$ (b) $x_0 \in (-\infty, 1)$ (c) $x_0 \in [0, \infty)$ (d) $x_0 \in [0, 1)$ (e) $x_0 \in (-\infty, 0]$
(f) cap de les anteriors

5. *Ex. Final 22-23 Q2 [q2]*

Segui $x(t)$ la solució del PVI $x'' = -x' - \frac{x}{f(t)}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, on $f(t)$ és una funció donada (tal que $f(0) \neq 0$).

Definint la funció $h(t) = x(t)^2 + f(t)x'(t)^2$, calculeu el valor de $h'(0)$. [Ind.: El resultat depèn de $f(0)$ i $f'(0)$.]

Resposta: $f'(0) - 2f(0)$

6. *Reav. 22-23 [t5]*

Considerem l'EDO $x' = (x - \alpha)(x - 1)^2(x - 5)$. Trobeu tots els valors del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals el punt d'equilibri $x = \alpha$ és atractor.

- (a) $\alpha \geq 5$ * (b) $\alpha < 5$ (c) $\alpha > 1$ (d) $\alpha \leq 1$ (e) cap de les anteriors

7. *Ex. Final 22-23 Q1 [t1]*

Considereu l'EDO $x' = \frac{x^2 - bx}{1 + x^2}$, on $b \in \mathbb{R}$ és un paràmetre, amb una condició inicial $x(0) = x_0$. Per a quins valors de x_0 tenim $x(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $x_0 \in (b, \infty)$ si $b < 0$, i $x_0 \in (0, \infty)$ si $b \geq 0$
(b) $x_0 \in (b, \infty)$ per a qualsevol $b \in \mathbb{R}$
(c) $x_0 \in (b, 0)$ si $b < 0$, $x_0 \in (0, b)$ si $b > 0$, i no hi ha cap x_0 si $b = 0$
* (d) $x_0 \in (0, \infty)$ si $b \leq 0$, i $x_0 \in (b, \infty)$ si $b > 0$
(e) cap de les anteriors

8. **Ex. Final 21-22 Q2 [t1]**

Considereu l'EDO autònoma $x' = x^2(1 - x^2)$. Quina de les afirmacions següents és certa?

- (a) la solució amb condició inicial $x(0) = -2$ satisfà que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -1$
- (b) la solució amb condició inicial $x(0) = 1/2$ satisfà que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- (c) el punt d'equilibri -1 és inestable no repulsor
- * (d) el punt d'equilibri 0 és inestable no repulsor
- (e) cap de les anteriors

9. **Reav. 21-22 [t5]**

El sistema autònom $x' = x^2(1 - x)$, $y' = y^2(1 - y)$ té quatre punts d'equilibri: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$. Esbrineu si són: estables (E), inestables (I), atractors (A), repulsors (R).

- * (a) el punt $(1, 1)$ és A, i els altres tres punts són I no R
- (b) el punt $(0, 0)$ és R, el punt $(1, 1)$ és A, i els altres dos punts són I no R
- (c) els quatre punts són I no R
- (d) els punts $(0, 0)$ i $(1, 1)$ són I no R, i els punts $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són E no A
- (e) cap de les anteriors

10. **Ex. Final 21-22 Q1 [t1]**

Segui $x(t)$ la solució del PVI $x' = -1 + \cos x$, $x(0) = 1$. Quin és el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2\pi$ (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -2\pi$ (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ * (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- (e) cap de les anteriors

11. **Ex. Parcial 20-21 Q2 [t1]**

Considereu l'EDO autònoma $x' = (2\pi - x) \sin x$. Digueu quina de les afirmacions següents és certa.

- (a) té almenys una solució $x(t)$ que és periòdica i no constant
- * (b) té almenys una solució $x(t)$ no constant tal que $x(t) \rightarrow 2\pi$ quan $t \rightarrow +\infty$
- (c) té almenys una solució $x(t)$ no constant tal que $x(t) \rightarrow 3\pi$ quan $t \rightarrow +\infty$
- (d) té almenys una solució $x(t)$ tal que $x(t) \rightarrow +\infty$ quan $t \rightarrow +\infty$
- (e) cap de les anteriors

12. **Reav. 20-21 [t1]**

Segui $(x(t), y(t))$ la solució del problema de valors inicials $\begin{cases} x' = (x - 1)^3 x, & x(0) = 1/2, \\ y' = y^2, & y(0) = -1/2. \end{cases}$

Quina de les afirmacions següents és certa?

- (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)$ (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (-\infty, -\infty)$
- * (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$ (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$
- (e) cap de les anteriors

13. **Ex. Parcial 20-21 Q1 [t1]**

Quants punts d'equilibri té exactament l'EDO $x' = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ i quina és la seva estabilitat?

- (a) Un punt d'equilibri repulsor i un que no és ni repulsor ni atractor
- (b) Dos punts d'equilibri repulsors i un d'atractor
- (c) Un punt d'equilibri atractor i un que no és ni repulsor ni atractor
- * (d) Dos punts d'equilibri atractors i un de repulsor
- (e) Un punt d'equilibri repulsor
- (f) Un punt d'equilibri atractor
- (g) cap de les anteriors

14. **Ex. Parcial 19-20 Q2 [t5]**

Considerem l'EDO de primer ordre $x' = \frac{x^2(x-1)^2(x-2)^2}{x^6+1}$, amb la condició inicial $x(0) = 3/2$. Quin és el límit de la solució $x(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$?

- (a) 0 (b) 1 * (c) 2 (d) ∞ (e) cap de les anteriors

15. **Ex. Final 19-20 Q2 [t9]**

Estudieu l'estabilitat dels dos punts d'equilibri de l'EDO $x' = -(x+1)^4(x-2)^4$.

- (a) un punt és atractor i l'altre és repulsor
- (b) un punt és inestable no repulsor i l'altre és repulsor

- (c) un punt és atractor i l'altre és inestable no repulsor
- * (d) tots dos punts són inestables no repulsors
- (e) tots dos punts són estables no atractors
- (f) un punt és atractor i l'altre és estable no atractor
- (g) cap de les anteriors

16. **Ex. Final 19-20 Q1 [q2]**

Considereu l'EDO de primer ordre $x' = x(1-x) - h$, on $h \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Per a quins valors de h aquesta EDO té algun punt d'equilibri que no sigui atractor ni repulsor?

Resposta: $h = 1/4$

17. **Ex. Final 18-19 Q2 [t3]**

Donat el sistema $x' = -3x$, $y' = y^3 - y$, quina condició ha de complir un punt (x_1, y_1) per pertànyer a la conca d'atracció d'un punt d'equilibri atractor? [Ind.: Recordeu que un punt (x_1, y_1) pertany a la conca d'atracció d'un punt d'equilibri si la solució del PVI amb la condició inicial al punt (x_1, y_1) tendeix al punt d'equilibri quan $t \rightarrow \infty$.]

- (a) $|x_1| > 1$
- * (b) $|y_1| < 1$
- (c) $|y_1| > 1$
- (d) $|x_1| < 1$
- (e) cap de les anteriors

18. **Reav. 18-19 [t5]**

Donada l'EDO de primer ordre $x' = x^3(x-1)(x-2)^2$, esbrineu si els seus punts d'equilibri són: estables (E), inestables (I), atractors (A), repulsors (R).

- (a) el punt 0 és E no A, el punt 1 és A, i el punt 2 és I no R
- (b) el punt 0 és I no R, el punt 1 és R, i el punt 2 és E no A
- (c) el punt 0 és R, el punt 1 és A, i el punt 2 és E no A
- * (d) el punt 0 és A, el punt 1 és R, i el punt 2 és I no R
- (e) cap de les anteriors

19. **Ex. Final 18-19 Q1 [t1]**

Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del sistema $x' = y^2 - y$, $y' = x^2 - x$, determinada per la condició inicial $(x(0), y(0)) = (2, 0)$. Què podem assegurar sobre la component $x(t)$?

- * (a) té un màxim relatiu estricte a l'instant $t = 0$
- (b) té un mínim relatiu estricte a l'instant $t = 0$
- (c) és constant
- (d) té un punt d'inflexió a l'instant $t = 0$
- (e) cap de les anteriors

20. **Ex. Final 18-19 Q1 [t3]**

L'EDO $x'' - 3x' + 2x = te^t$ té una solució particular de la forma $x_p(t) = (at + bt^2)e^t$. Quant valen a i b ?

- (a) $a = 3$ i $b = -1$
- (b) $a = 1$ i $b = 2/3$
- (c) $a = -1$ i $b = 2/3$
- * (d) $a = -1$ i $b = -1/2$
- (e) cap de les anteriors

21. **Ex. Final 17-18 Q2 [t1]**

Donat el sistema d'EDOs $x' = -3x$, $y' = y - y^3$, què han de complir les condicions inicials (x_0, y_0) per tal que la solució $(x(t), y(t))$ tendeixi al punt d'equilibri $(0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$?

- (a) x_0 qualsevol, $y_0 > 0$
- (b) $x_0 = 0$, y_0 qualsevol
- (c) x_0 qualsevol, $y_0 \in [-1, 1]$
- * (d) x_0 qualsevol, $y_0 = 0$
- (e) cap de les anteriors

22. **Ex. Final 17-18 Q2 [t3]**

L'EDO $x'' + x' - 6x = -12t$ té una solució particular de la forma $x_p(t) = at + b$. Quant valen a i b ?

- (a) $a = -1$, $b = 2/3$
- (b) $a = 3$, $b = -1$
- (c) $a = 0$, $b = 1/6$
- * (d) $a = 2$, $b = 1/3$
- (e) cap de les anteriors

23. **Ex. Final 17-18 Q1 [t1]**

Donada l'EDO $x' = 4x^2 + 12x + 9$, determineu l'estabilitat del seu únic punt d'equilibri.

- (a) estable no atractor
- (b) atractor
- (c) repulsor
- * (d) inestable no repulsor
- (e) cap de les anteriors

24. **Reav. 16-17 [t5]**

Donada l'EDO de primer ordre $x' = x(x+1)(x-1)^2$ esbrineu si els seus punts d'equilibri són: estables (E), inestables (I), atractors (A), repulsors (R).

- (a) el punt -1 és R, el punt 0 és A, i el punt 1 és I no R
- (b) el punt -1 és R, el punt 0 és A, i el punt 1 és E no A
- * (c) el punt -1 és A, el punt 0 és R, i el punt 1 és I no R
- (d) el punt -1 és A, el punt 0 és R, i el punt 1 és E no A
- (e) cap de les anteriors

25. **Reav. 15-16 [t7]**

Indiqueu l'estabilitat dels punts d'equilibri de l'EDO $x' = x(x-3)^2$.

- * (a) $x_1 = 0$ repulsor, $x_2 = 3$ inestable no repulsor
- (b) $x_1 = 0$ repulsor, $x_2 = 3$ repulsor
- (c) $x_1 = 0$ atractor, $x_2 = 3$ atractor
- (d) $x_1 = 0$ atractor, $x_2 = 3$ estable no atractor
- (e) cap de les anteriors

[B] Sistemes d'EDOs lineals: resolució

26. **Ex. Final 23-24 Q2 [t2]**

Si $x(t)$ és la solució del PVI $x'' + 2x' + x = -t + 2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$, trobeu el valor de $x(2)$. [Ind.: L'EDO té una solució particular de la forma $x_p(t) = At + B$.]

- (a) $3 - 9e^{-2}$
- * (b) $2 - 6e^{-2}$
- (c) $-1 + 6e^{-2}$
- (d) $3 + 12e^{-2}$
- (e) $1 - 12e^{-2}$
- (f) cap de les anteriors

27. **Reav. 23-24 [t6]**

Si $x(t)$ és la solució de l'EDO de segon ordre $x'' + 3x' + 2x = 0$, amb condicions inicials $(x(0), x'(0)) = (2, 1)$, determineu el valor de $x(t^*)$ per al qual $x'(t^*) = 0$.

- (a) $\frac{20}{3}$
- (b) $\frac{25}{16}$
- * (c) $\frac{25}{12}$
- (d) $\frac{16}{5}$
- (e) $\frac{4}{3}$
- (f) cap de les anteriors

28. **Ex. Final 23-24 Q1 [t2]**

Trobeu el valor de $y(1)$ per a la solució $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ del sistema no homogeni $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ amb la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sabent que $\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix}$ és una matriu fonamental de la part homogènia del sistema.

- * (a) $2e$
- (b) e
- (c) 0
- (d) $3e$
- (e) $-e$
- (f) cap de les anteriors

29. **Ex. Final 23-24 Q1 [q1]**

Donat el sistema d'EDOs $X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, considereu les solucions $X^{(1)}(t)$ i $X^{(2)}(t)$ que compleixen les condicions inicials $X^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $X^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trobeu la diferència $X^{(1)}(5) - X^{(2)}(5)$.

Resposta: $X^{(1)}(5) - X^{(2)}(5) = \begin{pmatrix} 2e^{15} \\ e^{15} \end{pmatrix}$

30. **Ex. Final 22-23 Q2 [t2]**

Siguin $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ dues solucions del sistema lineal no homogeni $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, que compleixen les condicions inicials $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivament. Calculeu la diferència $y_1(t) - y_2(t)$.

- (a) $-3 + 2e^{2t} \cos t$
- (b) $2e^{2t} \cos t$
- (c) $e^{2t}(2 \cos t - 2 \sin t)$
- * (d) $e^{2t}(2 \cos t + 5 \sin t)$
- (e) $e^{2t}(2 \cos t + \sin t)$
- (f) cap de les anteriors

31. **Ex. Final 22-23 Q2 [q1]**

Donat el sistema d'EDOs $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X$, trobeu:

- * $\Phi(t)$ matriu fonamental,
- * $X(t)$ solució que compleix la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Són úniques les respostes?

Resposta: $\Phi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -t & -1 \end{pmatrix}$ (no única); $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-2t \end{pmatrix}$ (única)

32. **Reav. 22-23 [t6]**

Si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ és la solució del PVI $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, trobeu x_0 per tal que $y(\ln 2) = 12$.

- (a) 1 (b) 3 (c) -3 (d) 2 (e) cap de les anteriors

33. **Reav. 22-23 [t7]**

Trobeu totes les solucions de l'EDO $x'' + 2x' + 5x = 10 \cos t$ que compleixen $x(0) = 0$. [Ind.: L'EDO té una solució particular de la forma $x_p(t) = A \cos t + B \sin t$.]

- (a) $x(t) = 2 \sin t + e^{-t}(c \cos 2t + 2 \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 *(b) $x(t) = 2 \cos t + \sin t + e^{-t}(-2 \cos 2t + c \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 (c) $x(t) = \cos t - 4c \sin t + e^{-t}(-\cos 2t + 5 \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 (d) $x(t) = 5 \cos t + c e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 (e) cap de les anteriors

34. **Ex. Final 22-23 Q1 [t2]**

Trobeu el valor t^* pel qual la solució del PVI $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, satisfà $y(t^*) = 0$.

- (a) $t^* = \ln 5$ (b) $t^* = (\ln 2)/10$ (c) no existeix t^* (d) $t^* = (\ln 3)/5$ (e) cap de les anteriors

35. **Ex. Final 22-23 Q1 [t3]**

Trobeu la solució general de l'EDO $x'' + 2x' + x = t^2$, sabent que té una solució particular de la forma $x_p(t) = d_1 t^2 + d_2 t + d_3$.

- (a) $4t e^{-t} + c_1 t^2 - 6c_2 t$
 *(b) $t^2 - 4t + 6 + (c_1 + c_2 t) e^{-t}$
 (c) $t^2 + 2t + 1 + c_1 e^{-t} + c_2(1+t) e^{-t}$
 (d) $\vec{w}(t) + e^{-t}(c_1 \vec{u} + c_2 t \vec{v})$ amb $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1)$, $\vec{w}(t) = (t^2, 2t)$
 (e) cap de les anteriors

36. **Ex. Final 21-22 Q2 [q1]**

Si $X(t)$ és la solució del PVI $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu $X(\ln 2)$.

Resposta: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

37. **Ex. Final 21-22 Q2 [q2]**

Trobeu la solució general de l'EDO $x'' - 2x' - 8x = e^{3t}$. [Ind.: Una de les solucions de l'EDO és de la forma $x_p(t) = Ae^{bt}$.]

Resposta: $x(t) = -\frac{1}{5} e^{3t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t}$

38. **Ex. Final 21-22 Q2 [t2]**

Segui $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del PVI $X' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $t_1 > 0$ és el primer instant en què $x(t_1) = 0$, quin és el valor de $y(t_1)$?

- (a) $-e^{\pi/2}$ (b) $2e^{\pi/4}$ *(c) $-\frac{1}{2}e^{\pi/4}$ (d) $\frac{1}{3}e^{\pi/2}$ (e) cap de les anteriors

39. **Reav. 21-22 [t6]**

Calculeu $X(1)$, per a la solució $X(t)$ del PVI $X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2e \\ e \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} e^{-9} \\ -4e^{-9} \end{pmatrix}$ *(d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (e) cap de les anteriors

40. **Ex. Final 21-22 Q1 [q1]**

Donat el PVI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

trobeu la primera component $x(t)$ de la solució, sabent que la part homogènia té $\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & 3e^{2t} \end{pmatrix}$ com una matriu fonamental.

Resposta: $2e^t - 2e^{2t}$

41. **Ex. Final 21-22 Q1 [t2]**

Si $(x(t), y(t))$ és la solució del PVI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

trobeu el valor de $x(\pi) + y(\pi)$.

- (a) 0 *(b) $-e^{-\pi}$ (c) 1 (d) $e^{2\pi}$ (e) cap de les anteriors

42. **Ex. Parcial 20-21 Q2 [t2]**

Considerem un sistema lineal $X' = AX$, on A és una matriu 3×3 de la qual sabem que té els vectors propis

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

amb els valors propis $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$, $\lambda_3 = 2$, respectivament. Si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ és la solució que

compleix la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, trobeu el valor de $y(\pi/2)$.

- (a) $y(\pi/2) = 0$ (b) $y(\pi/2) = 2e^\pi + e^{-\pi/2}$ (c) $y(\pi/2) = -2e^{-\pi/2}$ *(d) $y(\pi/2) = -(e^\pi + e^{-\pi/2})$
(e) cap de les anteriors

43. **Ex. Final 20-21 Q2 [t1]**

Considereu l'EDO de tercer ordre $2x''' - x'' - 2x = \sin t$. Definint funcions incògnites auxiliars $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = x''$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, l'EDO es pot reescriure com un sistema d'EDOs de primer ordre de la forma $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$, on A és una matriu i $\vec{b}(t)$ una funció vectorial. Digueu quines són la darrera fila de A i la darrera component de $\vec{b}(t)$.

- (a) $(1, 0, \frac{1}{2})$ i $\sin t$ *(b) $(1, 0, \frac{1}{2})$ i $\frac{1}{2} \sin t$ (c) $(1, \frac{1}{2}, 0)$ i $\sin t$ (d) $(1, \frac{1}{2}, 0)$ i $\frac{1}{2} \sin t$
(e) cap de les anteriors

44. **Reav. 20-21 [t2]**

Sigui A la matriu 4×4 que té els vectors $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ i $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ com a vectors propis de valor propi 1 i els vectors $\vec{v}_3 = (0, 1, 1, 0)$ i $\vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ com a vectors propis de valor propi -1 . Considereu el problema de valor inicial $X' = AX$, $X(0) = (1, 1, 1, 1)$, on $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, i digueu quina de les afirmacions següents és certa.

- (a) $x_2(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$ *(b) $x_2(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$
(c) $x_2(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow -\infty$ (d) $x_2(t) \rightarrow -\infty$ quan $t \rightarrow -\infty$
(e) cap de les anteriors

45. **Ex. Parcial 20-21 Q1 [t2]**

Sigui $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del sistema $X' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X$ amb les condicions inicials $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quant val $x(1)$?

- *(a) $(2e + 1)/3$ (b) $(e^{-1} + 2e)/3$
(c) $(e^2 + 2e)/3$ (d) $(e^{-3} + 2e)/3$
(e) $(2e^{-2} - e)/3$ (f) $(e + 2e^3)/3$
(g) cap de les anteriors

46. **Ex. Parcial 19-20 Q2 [t6]**

Sigui $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del sistema $X' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$ amb la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trobeu el valor de $y(1)$.

- (a) $8 - 5e$ *(b) $5 - 3e$ (c) $-4 + 3e$ (d) $-7 + 5e$ (e) cap de les anteriors

47. **Ex. Final 19-20 Q2 [t10]**

Donat el problema de valors inicials $X' = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ -1/4 & -1/2 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu $X(1)$.

- (a) $e^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ *(b) $e^{-1} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ (c) $e^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ (d) $e^{-1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -11/4 \end{pmatrix}$
 (e) cap de les anteriors

48. **Reav. 19-20 [t1]**

Calculeu $\begin{pmatrix} x(\pi/2) \\ y(\pi/2) \end{pmatrix}$ per a la solució del sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ amb la condició inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) $e^{-\pi/2} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *(b) $e^{-\pi/2} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ (c) $e^{-\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (d) $e^{-\pi/2} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (e) $e^{-\pi/2} \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 (f) cap de les anteriors

49. **Reav. 19-20 [t2]**

Donada l'EDO $x'' - 6x' + 5x = e^{-t}$, trobeu l'única solució $x(t)$ que tendeix a 0 quan $t \rightarrow +\infty$.

- (a) $\frac{1}{8}e^{-t}$ (b) $\frac{1}{10}e^{-t}$ *(c) $\frac{1}{12}e^{-t}$ (d) $\frac{1}{4}e^{-3t}$ (e) $\frac{1}{5}e^{-4t}$ (f) $\frac{1}{6}e^{-5t}$
 (g) cap de les anteriors

50. **Ex. Final 19-20 Q1 [t1]**

Donat el PVI $X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ amb $y_0 < -x_0$, trobeu el límit de la solució $X(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$.

- *(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} +\infty \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$ (e) cap de les anteriors

51. **Ex. Final 19-20 Q1 [q1]**

Considerem l'EDO $x'' + ax' + bx = 0$. Quant valen a i b per tal que l'EDO admeti $\sin 2t$ i $\cos 2t$ com a conjunt fonamental (base) de solucions?

Resposta:

$a = 0, \quad b = 4$

52. **Ex. Final 19-20 Q1 [q4]**

Per a la solució $X(t) = (x(t), y(t))$ del sistema lineal $x' = 3x - 2y$, $y' = 4x - y$, tal que $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, trobeu: el temps que trigarà en tallar de nou el semieix $\{(x, 0) : x > 0\}$, i les coordenades d'aquest punt de tall.

Resposta:

temps π i coordenades $(e^\pi, 0)$
--

53. **Ex. Final 18-19 Q2 [t1]**

Segui $(x(t), y(t))$ la solució del PVI $x' = 2x + y$, $y' = -x$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Trobeu el valor de $x(1)$.

- (a) $1 + e$ (b) e (c) $1 - e$ *(d) $2e$ (e) cap de les anteriors

54. **Reav. 18-19 [t6]**

Segui $x(t)$ la solució del PVI $x'' + x = t^2$, $x(0) = x'(0) = 0$. Quin és el valor de $x(2\pi)$? [Ind.: L'EDO té una solució particular de la forma $x_p(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2$.]

- (a) $\pi^2 + 2\pi$ (b) 0 *(c) $4\pi^2$ (d) $1 - \pi$ (e) cap de les anteriors

55. **Reav. 17-18 [t5]**

Donat el sistema d'EDOs $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \alpha & 1 \\ 5\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, i un conjunt fonamental de solucions $X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ y^{(1)}(t) \end{pmatrix}$, $X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x^{(2)}(t) \\ y^{(2)}(t) \end{pmatrix}$, definim $W(t)$ com el determinant wronskià d'aquestes solucions. Suposant que $W(0) > 0$, per a quins valors del paràmetre α podem assegurar que $W(t)$ és una funció estrictament creixent?

- (a) $\alpha < 2$ (b) $\alpha > 0$ *(c) $\alpha < -1$ o $\alpha > 2$ (d) $-1 < \alpha < 2$ (e) cap de les anteriors

56. **Ex. Final 17-18 Q1 [t2]**

Considerem un sistema lineal al pla, $X' = AX$, on A és una matriu tal que $\text{tr}A = 3$ i $\det A = -2$. Seguin $X^{(1)}(t)$ i $X^{(2)}(t)$ les solucions que satisfan les condicions inicials $X^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $X^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivament. Quin és el determinant de la matriu que té els vectors $X^{(1)}(5)$ i $X^{(2)}(5)$ com a columnes?

- (a) e^{-15} *(b) e^{15} (c) e^{-10} (d) e^{10} (e) cap de les anteriors

57. **Reav. 16-17 [t6]**

Donat el sistema lineal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, què podem dir de les seves solucions?

- (a) estan contingudes a les rectes $y = x + C$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, C)$
- (b) estan contingudes a les rectes $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$
- (c) estan contingudes a les rectes $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (C, C^2)$
- (d) estan contingudes a les rectes $y = x + C$, $C \in \mathbb{R}$, i $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (C, 2C)$
- (e) cap de les anteriors

58. **Reav. 16-17 [t7]**

Donada una funció $f(t)$, trobeu la solució del PVI $x'' = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$. [Ind.: variació de constants.]

- (a) $\int_0^t (t-s)f(s) ds$
- (b) $\int_0^t s f(s) ds$
- (c) $\int_0^t (t+s)f(s) ds$
- (d) $t \int_0^t f(s) ds$
- (e) cap de les anteriors

59. **Reav. 15-16 [t10]**

Trobeu la solució del PVI $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, essent $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avaluada en $t = 2$.

- (a) $\begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \\ e^{-2} \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} e^2 \\ 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} e^{-2} \\ 0 \\ e^2 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2} \\ e^2 \end{pmatrix}$
- (e) cap de les anteriors

[C] Sistemes d'EDOs lineals: estabilitat

60. **Ex. Final 23-24 Q2 [t3]**

Trobeu tots els valors de μ per als quals la solució del PVI $X' = \begin{pmatrix} \mu & -5 \\ -2 & -5\mu \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

- (a) $\mu > 1$
- (b) $\mu = 0$
- (c) $\mu = 1/2$
- (d) $\mu = 1/4$
- (e) $\mu = 2/5$
- (f) cap de les anteriors

61. **Ex. Final 23-24 Q2 [q1]**

Determineu, en funció del paràmetre μ , si el sistema lineal $X' = \begin{pmatrix} \mu^2 & -\mu \\ \mu^2 + 3 & -\mu - 2 \end{pmatrix} X$ és estable o inestable, indicant també si és en algun cas és atractor o repulsor.

Resposta:

estable atractor si $0 < \mu < 3/2$
 estable no atractor si $\mu = 0$ o $\mu = 3/2$
 inestable no repulsor si $\mu < 0$ o $\mu > 3/2$

62. **Reav. 23-24 [t7]**

Per a quins valors del paràmetre $\beta \in \mathbb{R}$ el sistema lineal 2D donat per la matriu $\begin{pmatrix} 3\beta & 4 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$ és un focus repulsor?

- (a) $\beta > 2$
- (b) $-2 < \beta < 0$
- (c) $\beta = \pm 2$
- (d) $0 < \beta < 2$
- (e) $\beta < -2$
- (f) cap de les anteriors

63. **Ex. Final 23-24 Q1 [t3]**

Considereu el sistema lineal homogeni de matriu $A_\mu = \begin{pmatrix} 3\mu & 4\mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu tots els valors de μ per als quals aquest sistema és un node repulsor.

- (a) $-1 < \mu \leq 1/9$
- (b) $\mu \geq 9$
- (c) $\mu \geq 1$
- (d) $-1/9 \leq \mu < 0$
- (e) $-1 \leq \mu < 0$
- (f) cap de les anteriors

64. **Ex. Final 22-23 Q2 [t3]**

Considerem el sistema lineal homogeni 2D donat per la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & \mu - 2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors del paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$ per als quals el sistema és un node propi atractor.

- *(a) $-3 < \mu < -2$ (b) $\mu = -3$ (c) mai (d) $\mu = -2$ (e) $\mu < -3$
 (f) cap de les anteriors

65. **Ex. Final 22-23 Q1 [t4]**

Donat el sistema lineal $X' = AX$ amb matriu $A = \begin{pmatrix} 5-3\mu & \mu-3 \\ \mu+3 & -1 \end{pmatrix}$, per a quins valors del paràmetre μ és estable?

- (a) $-1 < \mu < 4/3$ *(b) $4/3 \leq \mu \leq 4$ (c) $4/3 \leq \mu < 4$ (d) $-1 < \mu \leq 4/3$
 (e) cap de les anteriors

66. **Ex. Final 22-23 Q1 [t5]**

Trobeu els valors del paràmetre $\beta \in \mathbb{R}$ per als quals el sistema lineal 2D donat per la matriu $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 2 \end{pmatrix}$ és un focus que gira en sentit antihorari.

- (a) $-1/2 < \beta < 0$ (b) $\beta > 1/2$ (c) $|\beta| > 1/2$ *(d) $\beta < -1/2$ (e) cap de les anteriors

67. **Ex. Final 22-23 Q1 [q1]**

Donat el PVI $X' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, trobeu tots els valors del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals la solució $X(t)$ tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

Resposta:

68. **Ex. Final 21-22 Q2 [q3]**

Considereu a $\mathbb{R}^2$ el sistema lineal homogeni $X' = AX$, amb la matriu $A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 3\mu \end{pmatrix}$. Trobeu tots els valors de μ per als quals el sistema és un focus.

Resposta:

69. **Reav. 21-22 [t7]**

Trobeu tots els valors de μ per als quals la solució $X(t)$ del PVI $X' = \begin{pmatrix} 2-\mu & \mu \\ 8 & \mu-2 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

- (a) $\mu > 2$ (b) per a cap valor de μ (c) $\mu = -2$ *(d) $\mu < -2$ (e) cap de les anteriors

70. **Ex. Final 21-22 Q1 [q2]**

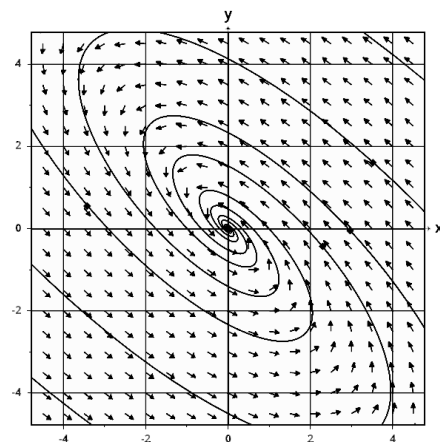
Trobeu els valors del paràmetre μ per als quals la solució del PVI $x'' - \mu x' - 3x = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$, compleix que $(x(t), x'(t))$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.

Resposta:

71. **Ex. Final 21-22 Q1 [t3]**

Només un dels sistemes lineals homogenis $X' = AX$ amb les matrius A indicades té el retrat de fase de la figura. Quin és? [Ind.: Us pot ajudar avaluar el camp vectorial en un punt adequat, per exemple $(1, 0)$.]

- (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 *(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
 (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
 (e) cap de les anteriors



72. **Ex. Parcial 20-21 Q2 [t3]**

Considereu el sistema d'EDOs $x' = x + y$, $y' = x + \mu y$, on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Diguen quina de les afirmacions següents és certa.

- *(a) Si $\mu > 1$, és un node (b) Si $\mu < 1$, és un focus

- (c) Si $\mu > 1$, és una sella
(e) cap de les anteriors

(d) Si $\mu < 1$, és un node

73. **Ex. Final 20-21 Q2 [q1]**

Sigui $x(t)$ la solució del problema de valors inicials següent: $x'' = \alpha x - 2x'$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -3$. Trobeu tots els valors de α per als quals $x(t)$ tendeix a 0 quan $t \rightarrow \infty$.

Resposta: $\alpha < 0$

74. **Reav. 20-21 [t3]**

Considerem el sistema d'EDOs lineal homogeni 2D, donat per la matriu $\begin{pmatrix} -1/3 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors del paràmetre b per als quals tenim un node repulsor.

- *(a) $\frac{1}{3} < b < \frac{4}{9}$ (b) $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{16}$ (c) $-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{9}$ (d) $\frac{1}{2} < b < \frac{9}{16}$
(e) cap de les anteriors

75. **Ex. Parcial 20-21 Q1 [t3]**

Considerem el sistema lineal $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X$, amb la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$. Com ha de ser el paràmetre a perquè la solució $X(t)$ compleixi que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = \infty$?

- (a) $a \neq -4$ (b) $a \neq 1 - \sqrt{5}$
(c) $a \neq -3 - \sqrt{13}$ *(d) $a \neq -5 - \sqrt{17}$
(e) $a = 2$ (f) $a = 1 + \sqrt{5}$
(g) $a = -3 + \sqrt{13}$ (h) $a = -5 + \sqrt{17}$
(i) cap de les anteriors

76. **Ex. Final 20-21 Q1 [t1]**

Considerem el sistema $X' = AX$, amb $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha - 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, essent $\alpha \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Determineu el conjunt de tots els valors de α per als quals el sistema és un focus atractor.

- *(a) $-2 - \sqrt{6} < \alpha < -1$ (b) $\alpha = -1$ (c) $-2 + \sqrt{6} < \alpha < 3/2$ (d) $\alpha = -2 \pm \sqrt{6}$
(e) cap de les anteriors

77. **Av. Cont. 19-20 Q2 [t1]**

El sistema següent, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \mu & -4 - \mu \\ -4 - \mu & 2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, depèn d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$. Digueu per a quin valor $\mu = \mu_0$ canvia l'estabilitat del sistema (és a dir, passa d'estable a inestable, o d'inestable a estable).

- (a) $\mu_0 = 3$ (b) $\mu_0 = 2$ (c) $\mu_0 = 0$ (d) $\mu_0 = -2$ *(e) $\mu_0 = -3$ (f) cap de les anteriors

78. **Av. Cont. 19-20 Q2 [t2]**

Considerem el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu & -2 \\ 4 & 6 - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, essent $\mu \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Trobeu el valor μ_0 del paràmetre per al qual el sistema és un centre, i indiqueu-ne el sentit de gir.

- (a) $\mu_0 = 16$, sentit horari (b) $\mu_0 = 9$, sentit horari
(c) $\mu_0 = 4$, sentit horari *(d) $\mu_0 = 4$, sentit antihorari
(e) $\mu_0 = 9$, sentit antihorari (f) $\mu_0 = 16$, sentit antihorari
(g) cap de les anteriors

79. **Ex. Final 19-20 Q2 [t11]**

Considerem el sistema lineal 2D de matriu $\begin{pmatrix} \alpha - 2 & 2\alpha - 5 \\ 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$, essent $\alpha \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Trobeu els valors de α per als quals aquest sistema és un focus, i en quin sentit giren les trajectòries.

- (a) $\alpha < 3/2$ però $\alpha \neq 1$, sentit antihorari (b) $\alpha < 3/2$ però $\alpha \neq 1$, sentit horari
*(c) $\alpha < 5/2$ però $\alpha \neq 2$, sentit antihorari (d) $\alpha < 5/2$ però $\alpha \neq 2$, sentit horari
(e) cap de les anteriors

80. **Reav. 19-20 [t3]**

Considerem les matrius $A_\sigma = \begin{pmatrix} 1 + \sigma & 1 - \sigma \\ \sigma - 1 & (1 + \sigma)/2 \end{pmatrix}$ per a $\sigma = \pm 1$. Estudieu l'estabilitat dels sistemes lineals a coeficients constants donats per aquestes dues matrius.

- (a) tots dos sistemes són atractors (b) un sistema és atractor i l'altre és estable no atractor
 (c) un sistema és atractor i l'altre és repulsor *(d) un sistema és estable no atractor i l'altre és repulsor
 (e) tots dos sistemes són repulsors (f) cap de les anteriors

81. **Ex. Final 19-20 Q1 [t2]**

Trobeu els valors del paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$ per als quals el sistema lineal $X' = \begin{pmatrix} -2\mu & \mu \\ -4 & 3-\mu \end{pmatrix} X$ és un focus atractor.

- (a) $\mu > 9$ *(b) $1 < \mu < 9$ (c) $\mu < 1$ (d) per a qualsevol valor de μ (e) cap de les anteriors

82. **Ex. Final 19-20 Q1 [t3]**

Donat el sistema lineal $x' = x + \mu y$, $y' = -2y$, trobeu μ per tal que la solució $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ que passa per $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tendeixi a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$.

- (a) $\mu \neq 1$ (b) $\mu = 1/2$ (c) $0 < \mu < 1$ *(d) $\mu = -6$ (e) cap de les anteriors

83. **Ex. Final 18-19 Q2 [q1]**

Considerem el sistema 3D $X' = AX$, donat per la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Per a quins valors de a, b, c el sistema té l'origen com a punt d'equilibri inestable?

Resposta: és inestable per a qualsevol valor de a, b, c

84. **Ex. Final 18-19 Q2 [t2]**

Donada l'EDO de segon ordre $x'' - 2x' + (1 + \mu^2)x = 0$, classifiqueu el sistema de primer ordre associat segons els valors del paràmetre μ .

- (a) node propi repulsor si $\mu \neq 0$ i node impropri repulsor si $\mu = 0$
 *(b) focus repulsor si $\mu \neq 0$ i node impropri repulsor si $\mu = 0$
 (c) node propi repulsor per a tot μ
 (d) focus atractor per a tot μ
 (e) cap de les anteriors

85. **Reav. 18-19 [t7]**

Donat el sistema lineal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \alpha \\ \alpha + 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, trobeu tots els valors del paràmetre α per als quals és un focus repulsor.

- *(a) $-1 < \alpha < 0$ (b) $\alpha < 1$ (c) $0 < \alpha < 4$ (d) $\alpha > -2$ (e) cap de les anteriors

86. **Ex. Final 18-19 Q1 [t2]**

Trobeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema $x' = ax + ay$, $y' = -ax - y$ és un focus atractor.

- (a) $a = 1$ (b) $a < 0$ *(c) $a < -1/3$ (d) $a < 1/2$ (e) cap de les anteriors

87. **Ex. Final 18-19 Q1 [t4]**

Considereu l'EDO $x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0$. Per a quins valors del paràmetre μ és estable el punt d'equilibri $(x, x') = (0, 0)$?

- (a) $\mu < -1$ (b) $\mu > 0$ (c) $\mu \geq 1$ *(d) $\mu \leq 0$ (e) cap de les anteriors

88. **Ex. Final 17-18 Q2 [t2]**

Donat el PVI següent, que depèn d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

trobeu el valor de μ per al qual la solució $(x(t), y(t))$ tendeix al $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.

- (a) 2 (b) -3 *(c) 4 (d) -1 (e) cap de les anteriors

89. **Reav. 17-18 [t6]**

Considerem el sistema lineal donat per la matriu $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors del paràmetre a tenim un node impropri?

- *(a) $a = -1$ (b) $a < 0$ (c) $a = \pm 1$ (d) $a > 1$ (e) cap de les anteriors

90. **Ex. Final 17-18 Q1 [t3]**

Donat el PVI següent, que depèn d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \mu \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

trobeu el valor de μ per al qual la solució $(x(t), y(t))$ tendeix al $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.

- (a) $\mu = -12$ (b) $\mu = -2$ (c) $\mu = 8$ (d) $\mu = 4$ (e) cap de les anteriors

91. **Reav. 15-16 [t8]**

Considerem a $\mathbb{R}^2$ el sistema lineal homogeni de matriu $A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ a-4 & 2 \end{pmatrix}$, essent $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Trobeu els valors de a per als quals el sistema és un focus, esbrinant si és atractor o repulsor.

- (a) $0 < a < 4$, i és repulsor (b) $0 < a < 4$, i és atractor
(c) $a > 4$, i és repulsor (d) $a < 0$, i és atractor
(e) cap de les anteriors

92. **Reav. 14-15 [t6]**

Donat el sistema lineal homogeni amb matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1+b \end{pmatrix}$ que depèn dels paràmetres a i b , assenyalau quina de les condicions següents és suficient perquè el sistema sigui un node impropri inestable.

- (a) $b = 0$ i $a = 1$ (b) $b = -1$ i $a = 0$ (c) $b = -3$ i $a = -2$ (d) $b = 1$ i $a = 2$
(e) cap de les anteriors

93. **Reav. 14-15 [t8]**

Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del problema de valors inicials

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\mu^2 - \mu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Per a quins valors de μ la solució tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $\mu < 0$ i $\mu = 2$ (b) $\mu = 2$ (c) $\mu > 0$ i $\mu = -2$ (d) $\mu = -2$ (e) cap de les anteriors

[D] Sistemes d'EDOs no lineals

94. **Ex. Final 23-24 Q2 [q2]**

Determineu els valors del paràmetre a per als quals l'origen és un punt d'equilibri repulsor del sistema d'EDOs $x' = ax^3 - x^5y^2$, $y' = ay - x^2y^3$. [Ind.: useu $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ com a funció de Lyapunov.]

Resposta: $a > 0$

95. **Reav. 23-24 [t8]**

El sistema no lineal $x' = y^2 - y$, $y' = x^2 - 9y$, té exactament 3 punts d'equilibri. En un d'aquests 3 punts el sistema linealitzat és una sella, i en un altre és degenerat. Classifiqueu el sistema linealitzat per al tercer punt d'equilibri.

- (a) un node propi atractor (b) un node impropri repulsor
(c) un centre (d) un node propi repulsor
(e) un focus atractor (f) cap de les anteriors

96. **Ex. Final 23-24 Q1 [q2]**

Donat el sistema d'EDOs $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$, definit pel camp vectorial $\vec{F} = (P, Q) = (2y, -16x + 4x^3)$, trobeu tots els seus punts d'equilibri i la seva estabilitat. [Ind.: quan sigui necessari, podeu usar com a funció de Lyapunov un potencial escalar del camp conservatiu $\vec{G} = (-Q, P)$ (és a dir, una funció $V(x, y)$ que tingui com a derivades parcials les components del camp $\vec{G}$).]

Resposta: $(0, 0)$ estable no atractor, $(\pm 2, 0)$ inestables no repulsors

97. **Ex. Final 22-23 Q2 [t4]**

Donat el sistema $x' = 3x - 4 \sin x - y$, $y' = -2x + e^{3x} - 1 + xy$, aplicant el mètode de linealització determineu si l'origen és un punt d'equilibri estable (E), inestable (I), atractor (A), repulsor (R), o si no es pot decidir amb aquest mètode.

- (a) R (b) I no R (c) A (d) E no A (e) no decideix (f) cap de les anteriors

98. **Reav. 22-23 [t8]**

Donada l'EDO de segon ordre no lineal $x'' + 2x' + \mu(x - x^2) = 0$, determineu tots els valors del paràmetre μ per als quals l'origen és un punt d'equilibri estable.

- (a) $\mu \leq 1$ (b) $\mu < 0$ (c) $\mu > 2$ *(d) $\mu \geq 0$ (e) cap de les anteriors

99. **Ex. Final 22-23 Q1 [t6]**

Considereu el sistema no lineal $x' = 2y$, $y' = 3x^2$. Quina de les afirmacions següents és certa? [Ind.: Observeu que la funció $V(x, y) = y^2 - x^3$ és una quantitat conservada del sistema.]

- *(a) la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
 (b) la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
 (c) no hi ha cap solució que tendeixi a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
 (d) la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
 (e) cap de les anteriors

100. **Ex. Final 22-23 Q1 [q2]**

El sistema no lineal $x' = y - x^3$, $y' = x^3(x - 1) - y$ té dos punts d'equilibri. Trobeu-los i estudieu la seva estabilitat.

[Ind.: quan calgui, podeu usar $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}$ com a funció de Lyapunov.]

Resposta: (0, 0) atractor, (2, 8) inestable no repulsor

101. **Ex. Final 21-22 Q2 [t3]**

Donat el sistema no lineal $x' = y - xy^2$, $y' = -x^3$, determineu si l'origen és estable o inestable, com a punt d'equilibri del sistema linealitzat i del sistema no lineal. [Ind.: Podeu considerar una funció de Lyapunov de la forma $V(x, y) = ax^4 + by^2$.]

- (a) estable per al sistema linealitzat, i inestable per al sistema no lineal
 (b) inestable per als dos sistemes
 (c) estable per als dos sistemes
 *(d) inestable per al sistema linealitzat, i estable per al sistema no lineal
 (e) cap de les anteriors

102. **Ex. Final 21-22 Q2 [t4]**

Considereu el sistema no lineal $x' = 3\lambda x - \mu x(x^2 + y^2)$, $y' = \lambda y - 2\mu y(x^2 + y^2)$. Per a quins valors dels paràmetres λ i μ l'origen és un punt d'equilibri repulsor? [Ind.: Podeu considerar $V(x, y) = x^2 + y^2$ com a funció de Lyapunov.]

- (a) o bé $\lambda > 0$, o bé $\lambda = 0$ i $\mu > 0$ (b) $\lambda \leq 0$ (c) $\lambda \geq 0$ *(d) o bé $\lambda > 0$, o bé $\lambda = 0$ i $\mu < 0$
 (e) cap de les anteriors

103. **Reav. 21-22 [t8]**

Considerem l'EDO de segon ordre no lineal $x'' = 6x^2$. Dues de les solucions d'aquesta EDO són:

$$x_1(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \in (-1, \infty); \quad x_2(t) = \frac{1}{(t-1)^2}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Amb aquesta informació, què podem dir de l'estabilitat del $(0, 0)$ com a punt d'equilibri del sistema 2D associat a l'EDO? [Ind.: Estudieu el límit d'aquestes solucions quan $t \rightarrow \infty$ o quan $t \rightarrow -\infty$, segons el cas.]

- (a) és estable no atractor (b) és atractor *(c) és inestable no repulsor (d) és repulsor
 (e) cap de les anteriors

104. **Ex. Final 21-22 Q1 [t4]**

El sistema no lineal $x' = -2y(y - x - 1)$, $y' = x(y - x - 1)$ té una quantitat conservada $V(x, y) = x^2 + 2y^2$. Sigui $(x(t), y(t))$ la solució que compleix la condició inicial $(x(0), y(0)) = (\sqrt{2}, 0)$. Trobeu, si existeix, el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$. [Ind.: Trobeu tots els punts d'equilibri del sistema. Noteu que les corbes de nivell de $V(x, y)$ són el·lipses. Determineu el sentit de gir de la solució $(x(t), y(t))$.]

- (a) ∞ (b) no existeix (c) 0 *(d) $-4/3$ (e) cap de les anteriors

105. **Reav. 20-21 [t4]**

Donat el sistema d'EDOs $x' = 2y + axy - 3y^2$, $y' = -3x - 2x^2 + bxy$, trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que les solucions es trobin sobre corbes de nivell de la funció $V(x, y) = 3x^2 + 2y^2$.

- (a) $a = \frac{9}{2}$, $b = \frac{4}{3}$ (b) $a = \frac{9}{2}$, $b = \frac{32}{3}$ (c) $a = \frac{32}{3}$, $b = \frac{9}{2}$ *(d) $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{9}{2}$
 (e) cap de les anteriors

106. **Ex. Parcial 20-21 Q1 [t4]**

Segui el sistema no lineal $x' = y - 4yx^2$, $y' = -x + 4x^3$, on $V(x, y) = x^2 + y^2$ és una quantitat conservada. Què podem dir de $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ per a la solució $(x(t), y(t))$ amb $(x(0), y(0)) = (-1/4, 1/4)$? [Ind.: Trobeu tots els punts d'equilibri i, si cal, determineu en quin sentit giren les trajectòries que no són punts d'equilibri.]

- (a) $\sqrt{7}$
- (b) $-\sqrt{13}/2$
- (c) 0
- *(d) No existeix perquè la solució és periòdica
- (e) $-\sqrt{7}$
- (f) $\sqrt{13}/2$
- (g) cap de les anteriors

107. **Ex. Parcial 20-21 Q1 [t5]**

Considerem el sistema $x' = -y + x^3$, $y' = 4x + bx^2y + y^3$ on b és un paràmetre. Trobeu els valors de b per als quals podem assegurar que l'origen és un punt d'equilibri repulsor, si usem una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + y^2)$. [Ind.: Podeu usar que una funció $\alpha x^4 + \beta x^2y^2 + \gamma y^4$ amb $\alpha, \gamma > 0$, és definida positiva si i només si $\beta > -2\sqrt{\alpha\gamma}$.]

- *(a) $b > -4$
- (b) $b > -2\sqrt{2}$
- (c) $b > -3$
- (d) $b > -2$
- (e) $b > -3/2$
- (f) cap de les anteriors

108. **Ex. Final 20-21 Q1 [t2]**

Considerem el sistema $x' = -2y + 2y^2 - 3x^3 + 2x^3y$, $y' = x - xy - 2y^3 + 3y^4$. Usant una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, què podem concloure sobre l'estabilitat de l'origen?

- (a) que segur que és estable no atractor
- (b) que és estable, però no sabem si atractor
- *(c) que segur que és atractor
- (d) que segur que és repulsor
- (e) cap de les anteriors

109. **Av. Cont. 19-20 Q2 [t3]**

El sistema d'EDOs $x' = x^2 - y$, $y' = 4 + 2x - y - x^2$, té dos punts d'equilibri. En un d'ells el sistema linealitzat és una sella. Classifiqueu el sistema linealitzat de l'altre punt d'equilibri.

- (a) node propi atractor
- (b) focus repulsor
- *(c) focus atractor
- (d) node propi repulsor
- (e) cap de les anteriors

110. **Av. Cont. 19-20 Q2 [t4]**

Considerem l'equació del moviment d'un pèndol sense fricció, $ml\theta'' + mgsin\theta = 0$, on $m = 3$ és la massa, $l = 3$ és la longitud, $g = 10$ és l'acceleració de la gravetat, i la funció incògnita $\theta(t)$ és l'angle respecte la posició vertical inferior. Sabem que l'energia total és $V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos\theta)$, on $\omega(t) = \theta'(t)$ és la velocitat angular. Per a la solució amb condicions inicials $\theta(0) = \pi$, $\theta'(0) = 6$, trobeu la velocitat angular $\theta'(t_1)$ en un instant t_1 en què tenim $\theta(t_1) = \pi/3$.

- (a) $\sqrt{5}$
- (b) $\sqrt{12}$
- (c) $\sqrt{21}$
- (d) $\sqrt{31}$
- *(e) $\sqrt{46}$
- (f) cap de les anteriors

111. **Ex. Final 19-20 Q2 [t12]**

Considerem el sistema d'EDOs $x' = x + 8y - px^3$, $y' = -2x - y + x^3$, on $p > 0$ és un paràmetre. Per determinar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri d'aquest sistema, usem una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = x^2 + xy + cy^2$ (la qual és definida positiva si $c > 1/4$), escollint c adequadament. Quin ha de ser el valor de p perquè el mètode de Lyapunov permeti assegurar que l'origen és estable?

- (a) $p = 2$
- (b) $p = 6$
- *(c) $p = 8$
- (d) $p = 12$
- (e) cap de les anteriors

112. **Reav. 19-20 [t4]**

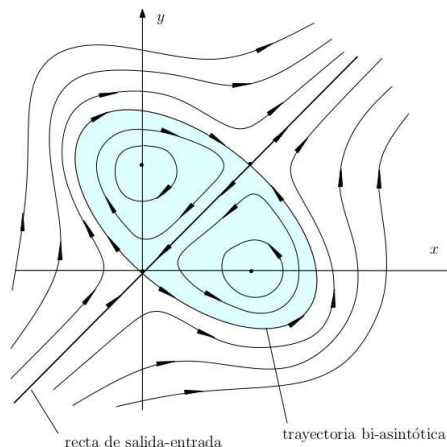
Considerem l'equació del moviment d'un pèndol amb fricció $ml\theta'' = -mgsin\theta - \mu l\theta'$, on $m = 1$ és la massa, $l = 3$ és la longitud, $g = 10$ és l'acceleració de la gravetat, $\mu = 7/5$ és el coeficient de fricció, i la funció incògnita $\theta(t)$ és l'angle respecte la posició vertical inferior. Trobeu la derivada temporal de l'energia total $V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos\theta)$, on $\omega = \theta'$, quan $\theta = \pi/3$ i $\theta' = 1/3$.

- (a) $-2/45$
- (b) $-3/5$
- (c) $-36/5$
- (d) $-6/5$
- *(e) $-7/5$
- (f) cap de les anteriors

113. **Ex. Final 19-20 Q1 [t4]**

Quin dels sistemes autònoms següents té el retrat de fase indicat a la figura?

- (a) $x' = y(y-1), \quad y' = x(x-1)$
- (b) $x' = y^2 - 1, \quad y' = x^2 - 1$
- (c) $x' = x(y-1), \quad y' = y(x-1)$
- (d) $x' = x(x-1), \quad y' = y(y-1)$
- (e) $x' = y - x, \quad y' = x - y$



114. **Ex. Final 19-20 Q1 [t5]**

El moviment 1D d'una partícula (de massa 1) sotmesa a una força $F(x)$ ve descrit per l'EDO de segon ordre $x'' = F(x)$. Suposem que $F(x) = -x(x-c)(x+c)$, essent $c \in \mathbb{R}$ una constant qualsevol. L'EDO genera un sistema no lineal al pla (x, y) , on $y = x'$. Quina de les següents afirmacions sobre aquest sistema és correcta?

- (a) sempre té 3 punts d'equilibri
- (b) és contractiu al semiplà superior ($y > 0$) i expansiu al semiplà inferior ($y < 0$)
- (c) té com a quantitat conservada $E = \frac{y^2}{2} + \mathcal{U}(x)$, essent $\mathcal{U}(x) = -\int F(x) dx$ (una primitiva)
- (d) hi ha un punt d'equilibri entorn del qual les òrbites del sistema giren en sentit antihorari
- (e) cap de les anteriors

115. **Ex. Final 18-19 Q2 [q2]**

Donat el sistema $x' = y(x-3), \quad y' = x(3-x)$, sigui $(x(t), y(t))$ la solució que compleix la condició inicial $(x(0), y(0)) = (-4, 0)$. A quin punt tendeix aquesta solució quan $t \rightarrow \infty$? [Ind.: Comenceu trobant tots els punts d'equilibri del sistema. A més, calculeu $xx' + yy'$ per trobar una quantitat conservada del sistema.]

Resposta: $(3, -\sqrt{7})$

116. **Ex. Final 18-19 Q2 [t4]**

Apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, al sistema $x' = y + x^3, \quad y' = -x + by^3$ on $b \neq 0$ és un paràmetre. Què deduïm sobre la estabilitat del $(0, 0)$ com a punt d'equilibri?

- (a) atractiu si $b > 0$, repulsor si $b < 0$
- (b) estable no atractiu per a qualsevol $b \neq 0$
- (c) repulsor si $b > 0$, no decideix si $b < 0$
- (d) no decideix si $b > 0$, atractiu si $b < 0$
- (e) cap de les anteriors

117. **Reav. 18-19 [t8]**

Considerem el sistema $x' = y^3 - x^5 + 3x^6, \quad y' = -x^3 + ay^5$. Per estudiar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri, apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = x^4 + y^4$. Per a quins valors del paràmetre a podem assegurar que l'origen és estable?

- (a) $a \leq 0$
- (b) $a \geq -4$
- (c) $-1 \leq a \leq 1$
- (d) $a < 3$
- (e) cap de les anteriors

118. **Ex. Final 17-18 Q2 [t4]**

Donat el sistema d'EDOs $x' = x^3 + x + x^2y, \quad y' = y^3 - x^3$, què podem deduir sobre el punt d'equilibri $(0, 0)$ si apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$?

- (a) és atractiu
- (b) és repulsor
- (c) el mètode no dona informació
- (d) és estable no atractiu
- (e) cap de les anteriors

119. **Reav. 17-18 [t7]**

El sistema no lineal $x' = (y-1)(x-2), \quad y' = (x-1)(2-x)$, té el punt $(1, 1)$ com a punt d'equilibri. Què podem dir de la seva estabilitat? [Ind.: podeu provar si $V(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ és adequada com a funció de Lyapunov.]

- (a) inestable
- (b) atractiu
- (c) estable no atractiu
- (d) no ho podem determinar
- (e) cap de les anteriors

120. **Ex. Final 17-18 Q1 [t4]**

Considerem el sistema no lineal $x' = y + ax^3$, $y' = -x - y^3$, on a és un paràmetre. Apliquem el mètode de Lyapunov per decidir l'estabilitat del punt d'equilibri $(0, 0)$, usant la funció $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$. Per a quins valors de a deduirem que el $(0, 0)$ és un atractor?

- (a) $0 < a < 1$ *(b) $a < 0$ (c) $a = 1$ (d) $a = 0$ (e) cap de les anteriors

121. **Reav. 16-17 [t8]**

Considereu el sistema d'EDOs al pla $x' = -(x^2 + y^2)(y + f(x, y))$, $y' = (x^2 + y^2)(x + g(x, y))$, on les funcions f i g són les que s'indica en cada cas. Si apliquem el mètode de Lyapunov amb $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, què podem garantir sobre el punt d'equilibri $(0, 0)$?

- (a) és inestable si $f = x$, $g = -y^3$ *(b) és estable si $f = y + xy^2$, $g = x$
 (c) és atractor si $f = xy$, $g = x^2$ (d) és estable si $f = y$, $g = -x$
 (e) cap de les anteriors

122. **Reav. 15-16 [t9]**

Indiqueu l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri del sistema d'EDOs $x' = xy^2 - x^3$, $y' = -3x^2y - y^3$.

[Ind.: Podeu usar una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ amb α i β adequades.]

- (a) repulsor (b) inestable no repulsor (c) estable no atractor *(d) atractor
 (e) cap de les anteriors

123. **Reav. 14-15 [t5]**

Donat el sistema $x' = xy - x^3(1 - xy)$, $y' = -x^2$, digueu quina afirmació és certa. [Ind.: Useu $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ i mireu si hi ha altres punts d'equilibri.]

- (a) l'origen és un repulsor (b) l'origen és un atractor
 (c) l'origen és inestable però no repulsor *(d) l'origen és estable però no atractor
 (e) cap de les anteriors
-