

Problemes d'EQUACIONS DIFERENCIALS

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Equip docent d'Equacions Diferencials

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Versió: Febrer 2023

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Continguts

Càlcul vectorial	pàg. 2
Equacions diferencials ordinàries (EDOs)	pàg. 8
Equacions en derivades parcials (EDPs)	pàg. 19

Nota: Tot el text subratllat són enllaços a pàgines web que poden ajudar a entendre millor cada problema, o bé ampliar informació.

CÀLCUL VECTORIAL

Integració sobre corbes

1. Longitud de l'arc de cicloide $\sigma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Longitud de l'epicicloide de k cúspides parametritzada per

$$\sigma(t) = (R(k+1)\cos t - R\cos(k+1)t, R(k+1)\sin t - R\sin(k+1)t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

3. Calculeu el temps teòric de navegació entre Lisboa i Nova York si seguim un cercle màxim (*ortodròmia*), navegant a 30 nusos.

4. Una cinta de casset de $16 \mu\text{m}$ (micròmetres) de gruix s'enrotlla en una bobina de radi interior $r_0 = 1.11 \text{ cm}$ i radi exterior $r_1 = 2.46 \text{ cm}$. Quant mesura la cinta de la bobina? [Ind.: Aproximeu la forma de la bobina per la corba descrita en polars mitjançant l'equació $r = g(\theta) = c\theta$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, essent $c > 0$ una constant a determinar, de manera que $r_j = c\theta_j$.]

5. Massa d'una espira de l'hèlix de radi R i alçària h parametritzada per

$$\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht/2\pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

si la densitat en cada punt és proporcional a la distància a l'origen, essent $k > 0$ la constant de proporcionalitat.

6. Massa de la cardioida definida en polars per $r = R(1 + \cos \theta)$ si la densitat en cada punt és proporcional a l'arrel quadrada de la distància a l'origen, essent $k > 0$ la constant de proporcionalitat.

7. Massa de l'arc d'hèlix cònica parametritzada per

$$\sigma(t) = (Re^t \cos t, Re^t \sin t, Re^t)$$

que uneix els punts $A = (R, 0, R)$ i $B = (0, Re^{\pi/2}, Re^{\pi/2})$ si la seva densitat lineal ve donada per $\rho(\sigma(t)) = ke^t$, essent $k > 0$.

8. Massa de la semicircumferència de radi R si la seva densitat lineal és proporcional al cub de la distància a la recta que parteix la circumferència en dues meitats, essent $k > 0$ la constant de proporcionalitat.

9. Àrea i alçària mitjana de la tanca que té com a base el quart d'astroide parametritzat per

$$\sigma(t) = (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

i tal que la seva alçària ve donada per la funció $h(x, y) = 1 + y/3$.

10. Circulació $\oint_C x dy - y dx$, essent C el quadrat de costat $2L$ i centre (x_0, y_0) recorregut en sentit antihorari. [Obs.: Aquest problema ens permet motivar el teorema de Green.]

11. Circulació del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ al llarg de la corba C parametritzada per

$$\sigma(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Els teoremes integrals I

12. Calculeu les circulacions següents:

(a) Camp $\mathbf{F}(x, y) = (4x + 4x^3 - 8xy^2, -8x^2y + 16y^3)$ al llarg de la semicircumferència definida per $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y \geq 0$, recorreguda en sentit antihorari.

(b) Camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$ al llarg de l'hèlix parametritzada per

$$\sigma(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2), \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\pi}.$$

(c) Camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y, xe^y, 2z)$ al llarg de la corba parametritzada per

$$\sigma(t) = \left(1 + t \int_1^t e^{u^2} du, t, t^2\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

[Ind.: Tingueu en compte si els camps vectorials donats *provenen de potencial escalar*.]

13. Proveu, usant el teorema de Green, que l'àrea de la *cicloide* de radi R (és a dir, l'àrea de la regió compresa entre l'eix horitzontal i l'arc de cicloide; vegeu el problema 1) és el triple de l'àrea del cercle de radi R .

14. La corba donada en coordenades polars per l'equació $r = R \sin k\theta$ rep el nom de rosa polar. Calculeu-ne l'àrea d'un pètal ($0 \leq \theta \leq \pi/k$), usant el teorema de Green.

[Obs.: Si volem considerar la rosa completa ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), existeixen dues interpretacions oposades del significat de l'equació $r = g(\theta)$. En primer lloc, com que la distància a l'origen no pot ser negativa, podem entendre que la corba està formada pels punts que en coordenades polars són de la forma $r = g(\theta) \geq 0$. L'altra possibilitat consisteix a parametritzar la corba per $\sigma(\theta) = (g(\theta) \cos \theta, g(\theta) \sin \theta)$ i considerar-la bien definida fins i tot quan $g(\theta) < 0$. El nombre de pètals, i per tant l'àrea total, dependrà de quina interpretació considerem.]

15. Considerem el camp $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$ i la circumferència C de radi 1 centrada a l'origen, orientada en sentit antihorari.

(a) Deduïu, mitjançant un raonament gràfic, quin és el signe de la circulació $\oint_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle$.

(b) Calculeu la circulació anterior usant Green.

16. Verifiqueu el teorema de Green amb el camp $\mathbf{F}(x, y) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3)$ i la *corona circular*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

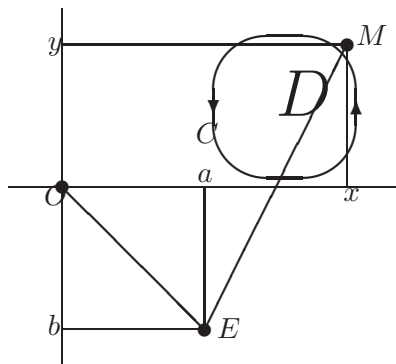
(la qual és un exemple de domini pla no simplement connex).

17. Sigui C la frontera del *domini foradat* $D \subset \mathbb{R}^2$, obtingut en suprimir tres discs de radi 1 amb centres a $(-3, 0)$, $(0, 0)$ i $(3, 0)$ del disc de radi 10 centrat a $(1, 0)$. Calculeu la circulació

$$\int_C (y + x^3 \cos(x^2)) dx + (e^{y^2} + 2x) dy$$

orientant la circumferència gran de C en sentit horari i les tres més petites en sentit antihorari.

18. El *planímetre polar* (vegeu [Wikipedia](#) i [Mathematik.com](#)) és un instrument mecànic que permet mesurar àrees de dominis plans. Té la forma d'un regle amb dos braços (vegeu la figura). Un dels braços connecta l'extrem fix $O = (0, 0)$ amb un punt mòbil $E = (a, b)$, i l'altre connecta el punt E amb un segon punt mòbil $M = (x, y)$. A l'extrem M hi ha una petita roda perpendicular al braç EM . Suposarem que els braços OE i EM tenen longituds l i L , respectivament. Aleshores el punt M determina el punt E com la intersecció de la circumferència de radi l centrada en O i la circumferència de radi L centrada en M . Aquesta intersecció és única si l'angle entre els dos braços del planímetre és inferior a π rad. Per tant, podem considerar que $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$.



Esquema d'un planímetre polar.

El mètode per a determinar l'àrea d'un domini pla simplement connex $S \subset \mathbb{R}^2$ consisteix en moure el punt M sobre la frontera $C = \partial S$ en sentit antihorari. La roda en M mesura el desplaçament en la direcció ortogonal al braç. En aquest problema veurem que l'àrea buscada és L cops el desplaçament total de la roda.

- (a) Proveu que $a_x + b_y \equiv 1$ derivant les equacions $a^2 + b^2 \equiv l^2$ i $(x - a)^2 + (y - b)^2 \equiv L^2$.
- (b) Sigui $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ el vector de norma L ortogonal al braç EM a l'extrem $M = (x, y)$ donat per $P(x, y) = b(x, y) - y$ i $Q(x, y) = x - a(x, y)$. Proveu que

$$\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \text{Area}(D).$$

- (c) Sigui d la distància recorreguda per la roda en completar el recorregut antihorari al llarg de la corba $C = \partial D$. Raoneu que

$$\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = Ld.$$

Integració sobre superfícies

19. Àrea de l'*helicoida* parametritzat per

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, h\theta), \quad (r, \theta) \in D = [0, R] \times [0, 2\pi].$$

20. Àrea de la superfície S consistent en la porció del pla $x + y + z = 1$ que es troba sobre l'el·lipse $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.
21. Es defineix l'*angle sòlid* d'una porció S de l'esfera de radi R com $\Omega(S) := \text{Area}(S)/R^2$, mesurada en sr (*estereoradians*). Com a cas particular, l'esfera completa té 4π sr.

- (a) Sigui $S_{R,\alpha}$ la porció de l'esfera de radi R que es troba dins d'un con amb vèrtex al centre de l'esfera i semiangle α . Per a quin valor del semiangle α es compleix que $\Omega(S_{R,\alpha}) = 1$?
- (b) Proveu que l'àrea del casquet esfèric de radi R i alçada $h < R$ donat per

$$C_{R,h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq R - h\}$$

coincideix amb l'àrea de la cara lateral del cilindre de radi R i alçada h .

22. Àrea i volum de la intersecció de dos cilindres de radi R els eixos dels quals es tallen perpendicularment. (Es tracta del *sòlid de Steinmetz*: vegeu [Wikipedia](#) i [MathWorld](#).)
23. Aplicant el teorema de Pappus–Guldin, calculeu els centres geomètrics de la semicircumferència i el semicercle de radi R .
24. Calculeu el volum i l'àrea de la figura de revolució que s'obté en perforar una bola de radi R amb una broca cilíndrica de radi $r < R$ que passa pel seu centre. Comproveu que si h és l'"alçada" del forat, aleshores el volum només depèn de h , mentre que l'àrea coincideix amb l'àrea conjunta de les dues cares laterals d'uns cilindres de radis r i R , tots dos d'alçada h ("napkin ring problem").
25. Considerem una esfera de radi $2R$ i un cilindre que és tangent a l'esfera en un punt i passa pel centre de l'esfera. En coordenades, podem escriure l'esfera com a $E = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2\}$ i el cilindre com a $Q = \{(x - R)^2 + y^2 = R^2\}$.
- (a) La intersecció $E \cap Q$ dona lloc a la corba de Viviani, que té longitud cR per alguna constant c . Doneu una fórmula integral per a c (no cal que calculeu aquesta integral).
- (b) Calculeu l'àrea de les porcions S_1^+ i S_1^- de l'esfera contingudes a l'interior del cilindre (volta de Viviani).
- (c) Calculeu l'àrea de la porció S_2 del cilindre continguda a l'interior de l'esfera.
26. Centre geomètric de les semiesferes sòlida i buida de radi R .
27. Càrrega total de la cara lateral del con d'alçada h i radi R si la densitat de càrrega és proporcional a la distància a la seva base, essent k la constant de proporcionalitat.
28. Càrrega total de la superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 + a^2, a \leq z \leq a\sqrt{2}\}$$

(porció d'hiperboloide de dues fulles) si la densitat de càrrega és $e(x, y, z) = kz$, essent k una constant.

29. Considerem l'el·lipsoide

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$$

orientat pel seu vector normal unitari exterior $\mathbf{N}$. Sigui $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ la funció donada per $f(p) = \text{dist}(O, T_p S)$, on $O = (0, 0, 0)$ és l'origen i $T_p S$ és el pla tangent a l'el·lipsoide en el punt p .

- (a) Calculeu $\int_S f \, dS$.
- (b) Proveu que la component normal del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x/a^2, y/b^2, z/c^2)$ és $F_N := \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = 1/f$. Calculeu el flux $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.
- (c) Calculeu el flux $\int_S \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle$, essent $\mathbf{G}(x, y, z) = z\mathbf{F}(x, y, z)$.

30. Quan obrim poc a poc una aixeta, es forma un petit *raig d'aigua*, el radi del qual va disminuint amb la distància a l'aixeta. Calculeu la forma del raig en funció del radi inicial r_0 , la velocitat inicial v_0 i l'acceleració de la gravetat g , suposant que la component vertical de la velocitat és constant en cada secció horitzontal.

31. Flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, -y^2, z^2)$ a través de cadascuna de les superfícies següents:

- (a) La frontera de $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}\}$.
- (b) L'octant d'esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \geq 0\}$.

En ambdós casos, orientem les superfícies per la normal exterior.

32. Flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, -y, 0)$ a través de la superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq h\}$$

(un quadrant de cilindre) orientada per la normal exterior.

33. Flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través de la superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x^2 + y^2)/R^2, z \leq h\}$$

(porció de *paraboloide el·líptic*) orientada per la normal interior.

34. Flux del camp $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porció S del *paraboloide hiperbòlic* $z = h(x^2 - y^2)/L^2$, tallada pels tres plans $x = 0$, $x = L$ i $z = 0$, orientada al punt $O = (0, 0, 0)$ pel vector $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (suposeu $h, L > 0$).

35. Flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2, 3y^2, z^2)$ a través de la frontera del sòlid de revolució següent:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}\},$$

orientada per la normal exterior (és a dir, el *flux sortint* del sòlid W).

Els teoremes integrals II

36. Donat el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$, calculeu-ne el flux sortint del *del cub unitat* $W = [0, 1]^3$ (és a dir, el flux a través de la frontera $S = \partial W$ orientada per la normal exterior).

37. Sigui $\mathbf{F}$ un *camp central* sense singularitats, és a dir, $\mathbf{F} = h(r)\mathbf{r}$, on $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ i $h(r)$ és una funció de classe C^1 a l'interval $[0, \infty)$. Sigui S_R l'esfera de radi R centrada a l'origen orientada per la normal exterior. Calculeu el flux sortint $\int_{S_R} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ de dues maneres diferents:

- (a) integrant la component normal del camp sobre l'esfera;
- (b) aplicant el teorema de Gauss.

Compareu els resultats amb la llei de Gauss.

38. Flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$ a través del cilindre

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3\}$$

orientat per la normal exterior. [Ind.: En aquest problema i els següents, podeu “*tapar*” la superfície, per tal d'aplicar el teorema de Gauss sobre una superfície tancada.]

39. Calculeu el flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, 0, x + z)$ a través de la porció d'esfera donada per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 25, y \leq 9, z \geq 1\}$$

orientada pel vector normal $\mathbf{N}(x, y, z) = (x, y - 5, z - 5)$.

40. Considerem la porció d'el·lipsoide donada per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2/3 + z^2 = 1, y \leq 1, z \leq 2/3\}.$$

- (a) Calculeu la circulació $\oint_C z dx + y dy - x dz$, essent $C = S \cap \{y = 1\}$ orientada pel vector tangent $\mathbf{T}(x, 1, z) = (-z, 0, x)$.

- (b) Calculeu el flux $\int_S dz dx$ orientant S de manera compatible amb l'orientació anterior.

41. Flux de $\mathbf{F}(x, y, z) = (2e^{-x}y, e^{-x}y^2, 1)$ a través de la superfície de revolució

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = z^4, 1 \leq z \leq 2\}$$

orientada pel vector normal $\mathbf{N}(x, y, z) = (x - 2, y - 2, -2z^3)$.

42. Flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) \equiv (1, 0, 2)$ a través de la porció de paraboloides el·líptic

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 4y^2, z \leq 3y^2 + 1\}$$

orientada pel vector normal amb component vertical positiva. [Ind.: Podeu afegir a la superfície S una "tapa" no plana.]

43. Calculeu, usant el teorema de Stokes, la circulació $\oint_C (-y^2) dx + z dy + x dz$ essent C el triangle obtingut en interseccar el pla $2x + 2y + z = 6$ amb els tres eixos de coordenades, orientat pel vector normal unitari $\mathbf{N}(x, y, z) = (2/3, 2/3, 1/3)$.

44. Considereu la superfície regular a trossos $S = S_1 \cup S_2 \subset \mathbb{R}^3$ definida per

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$$

orientada per la normal exterior. Donat el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + xz + yz^2, y + xyz^3, x^2z^4)$, calculeu el flux $\int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.

45. Verifiqueu el teorema de Stokes amb el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z, x, y^2)$ i la porció de paraboloides circular

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$

orientada de manera que la frontera $C = \partial S$ es recorri en sentit antihorari [Larson–Edwards, §15.8].

46. Considerem la porció de cilindre donada per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 5\}.$$

- (a) Calculeu el flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - 5y, y + 4xz, 3z)$ a través de la superfície S orientada pel vector normal unitari $\mathbf{N}(x, y, z) = (x/2, y/2, 0)$.

- (b) Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg de la frontera ∂S orientada pel mateix vector normal.

- (c) Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg de cada component connexa de la frontera ∂S , orientats pel mateix vector normal.

47. (a) Per a la superfície $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, z \leq 1, x, y \geq 0\}$, orientada al punt $(1/2, 1/2, 1/2)$ per vector $\mathbf{N} = (1, 1, -1)/\sqrt{3}$, calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{F} = (1, 0, 0)$ aplicant el teorema de Stokes. [Ind.: Podeu usar que un camp vectorial constant $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ té com un potencial vector el camp $\mathbf{G} = \frac{1}{2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}$.]

- (b) Calculeu el mateix flux de l'apartat (a), aplicant el teorema de Gauss. [Ind.: Afegiu 3 tapes planes adequades per obtenir una superfície tancada.]

- (c) Calculeu el mateix flux de l'apartat (a) directament (és a dir, aplicant la definició de flux).

EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES (EDOs)

Conceptes i teoremes generals sobre sistemes d'EDOs

1. Sigui $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$.

- (a) Quina relació existeix entre les òrbites dels sistemes $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}' = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$? I entre les seves trajectòries?
- (b) Mateixa qüestió per als sistemes $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}' = 2\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

2. Considerem el camp de vectors associat al sistema

$$\begin{cases} x' &= x(1-y), \\ y' &= y(x-1). \end{cases}$$

En quins punts el camp de vectors és horitzontal? I vertical? Sabent que totes les trajectòries contingudes al primer quadrant donen voltes entorn del punt $(1, 1)$, determineu el *sentit de gir* (horari o antihorari) d'aquestes trajectòries.

3. Considerem les trajectòries del següent *sistema no lineal 2D*,

$$\begin{cases} x' &= y, \\ y' &= (1-x^2)y - x. \end{cases}$$

- (a) Veient que la velocitat a l'origen és nul·la, pot passar una trajectòria per l'origen sense quedar-s'hi? Per què?
 - (b) Si una trajectòria parteix d'un punt de la recta $x = 1$, inicialment es mourà cap amunt o cap avall?
 - (c) Descriviu el lloc geomètric dels punts (x, y) en els quals el mòdul de la velocitat de la trajectòria coincideix amb la distància a l'origen.
4. Sigui $x(t)$ la solució del *problema de valor inicial* (PVI) següent, associat a una *EDO de primer ordre no autònoma*:

$$x' = (t - x)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Per a quines condicions inicials (t_0, x_0) és constant la funció $x(t)$; és a dir, $x(t) \equiv x_0$? Per a quines condicions inicials té $x(t)$ un màxim local estricte en $t = t_0$? I un mínim?

5. Siguin $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les solucions del PVI següent, associat a un *sistema no lineal 3D autònom*:

$$\begin{cases} x' = yz & x(0) = 0, \\ y' = -xz & y(0) = 1, \\ z' = -xy & z(0) = 1. \end{cases}$$

Alguna de les tres funcions té un mínim local estricte en $t = 0$? I un màxim?

6. Dibuixeu el *retrat de fase* de la següent EDO de primer ordre autònoma:

$$x' = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calculeu tots els seus punts d'equilibri i determineu la seva estabilitat.
- (b) Existeix alguna solució que escapi a $\pm\infty$? Raoneu la resposta.

- (c) Existeix alguna solució 2π -periòdica no constant? Raoneu la resposta.
 (d) Donades dues solucions arbitràries no constants $x_1(t)$ i $x_2(t)$, considerem els límits

$$x_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t), \quad x_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t).$$

Quins possibles valors pot tenir la diferència $x_1(\infty) - x_2(\infty)$?

7. Dibuixeu el retrat de fase del següent *sistema desacoblat* $2D$,

$$\begin{cases} x' &= -x + 3x^2 - 2x^3, \\ y' &= -2y. \end{cases}$$

Per a cada punt d'equilibri atractiu, determineu la seva conca de atracció.

Sistemes d'EDOs lineals

8. Calculeu *una* matriu fonamental i la solució general del *sistema lineal homogeni a coeficients constants* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, per a cadascuna de les matrius següents:

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad (b) \ A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Ind.: Per a la tercera matriu, que no diagonalitza ja que té valor propi doble $\lambda = 1$ amb multiplicitat geomètrica 1, podeu obtenir 2 solucions linealment independents del sistema buscant prèviament 2 vectors linealment independents $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tals que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.]

9. Calculeu la solució del PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, essent

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Té el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ alguna *solució fitada* per a tot $t \in \mathbb{R}$?

10. Resoleu els PVI's donats per cadascuna de les *EDOs lineals de segon ordre* següents,

$$(a) \ x'' + 4x' = 0, \quad (b) \ x'' + 4x' + 4x = 0, \quad (c) \ x'' + 4x' + 5x = 0,$$

amb les condicions inicials $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

11. Resoleu, aplicant el mètode de *variació de les constants*, els sistemes no homogenis $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, essent

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

$$(c) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

12. Resoleu el sistema lineal següent, amb *terme no homogeni constant*: $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. Trobeu la solució general de l'EDO de segon ordre $x'' + 2x' + x = te^{-t}$.

14. Calculeu la solució general *real* del sistema lineal homogeni $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, essent $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per a quins valors $L > 0$ el problema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(L) = 0$$

té solucions no trivials? [*Obs.*: Es tracta d'un *problema de valors a la frontera* (PVF) ja que les condicions sobre $x_1(0)$ i $x_2(L)$ s'imposen en punts diferents.]

15. Sigui $\mathbf{b} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funció contínua qualsevol. Proveu que el PVF següent té solució única:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad x_1(0) = x_2(L) = 0$$

(aquí, les funcions $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són les components del vector solució $\mathbf{x}(t)$). [*Ind.*: No cal que calculeu una solució particular.]

16. Per a cadascun dels sistemes lineals del pla donats per les matrius següents,

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, & \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, & \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, & \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

classifiqueu-lo i dibuixeu un *croquis* aproximat del seu retrat de fase, tot determinant-ne:

- si expandeix, contrau o preserva àrea;
- direccions d'entrada i/o sortida, si n'hi ha;
- direcció d'entrada (o sortida) més ràpida, si n'existeix més d'una;
- sentit de gir de les trajectòries, si és el cas;
- recta de punts d'equilibri, si n'hi ha.

17. Reescriuint l'EDO lineal de segon ordre $x'' + 2x' + x = 0$ com un sistema lineal 2D, classifiqueu aquest sistema i dibuixeu-ne un croquis aproximat del seu retrat de fase. Interpreteu les seves òrbites en termes de les solucions de l'EDO original.
18. Si A és una matriu real 2×2 amb valors propis complexos conjugats, doneu una condició suficient perquè el *sentit de gir* de les trajectòries del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sigui horari. En el cas que el sistema vingui associat a una EDO lineal de segon ordre, quin és el sentit de gir?
19. Sigui A una matriu real 2×2 amb un valor propi doble no nul. Doneu una condició necessària i suficient perquè el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sigui un *node impropri*.
20. Si $\mathbf{x}(t)$ és la solució del PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, determineu en cadascun dels casos següents els valors del paràmetre per als quals la solució $\mathbf{x}(t)$ *tendeix a l'origen* quan $t \rightarrow \infty$:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2 & 2\mu \\ 2\mu & \mu^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

21. Determineu el *diagrama de bifurcacions* corresponent a l'estabilitat i classificació del sistema lineal associat a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \mu & \mu - 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Quines bifurcacions comporten un canvi d'estabilitat?

22. Determineu el diagrama de bifurcacions corresponent a la estabilitat i classificació del sistema lineal associat a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 - 3\mu^2 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Quines bifurcacions comporten un canvi d'estabilitat?

23. Calculeu la solució general i dibuixeu un croquis detallat del següent *sistema lineal 3D*:

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + z, \\ y' &= -y + 4z, \\ z' &= z. \end{cases}$$

24. Dibuixeu el croquis del sistema lineal 3D associat a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Ind.: Els valors propis d'aquesta matriu són $\lambda_{1,2} = \pm i$ i $\lambda_3 = 2$.]

25. Considerem un sistema lineal al pla, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, on la matriu A depèn d'un paràmetre:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- Calculeu la seva estabilitat i classifiqueu-lo en funció de μ .
- Dibuixeu un croquis de les seves trajectòries en el pla $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ per a cadascun dels següents valors del paràmetre: $\mu = 0$, $\mu = 1$ i $\mu = 2$.
 - En un dels tres casos anteriors hi ha una recta d'entrada i una altra de sortida. En aquest cas, és possible que una trajectòria que comença al primer quadrant arribi al tercer quadrant? Per què?
 - En un altre cas totes les trajectòries són periòdiques. De quin període?
 - En un altre cas el sistema és degenerat. És inestable? Per què?

26. Donada l'EDO lineal de segon ordre $x'' = -ax - bx'$, estudeu la seva estabilitat i classifiqueu-la en funció dels paràmetres, que suposem $a > 0$ i $b \geq 0$ (*oscil·lacions lineals*).

Sistemes d'EDOs no lineals

27. Calculeu els punts d'equilibri dels sistemes no lineals següents,

$$(a) \begin{cases} x' &= xy + 12, \\ y' &= x^2 + y^2 - 25; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' &= y - x^2, \\ y' &= x + y - 2. \end{cases}$$

Per a cada sistema, estudeu pel *mètode de linealització* l'estabilitat dels seus punts d'equilibri. A quines zones del pla (x, y) s'expandeixen o es contrauen àrees?

28. Apliqueu el *mètode de Lyapunov*, usant la funció $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, per estudiar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri dels sistemes següents:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{cases} x' &= y - 3x^3, \\ y' &= -x - 7y^3; \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x' &= -x + (x + y)^2x, \\ y' &= -y^3 + (x + y)^2y^3; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \begin{cases} x' &= -x^3 + 4xy^2, \\ y' &= -4y^3; \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x' &= 2x^3 - 2y^3, \\ y' &= 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3. \end{cases} \end{array}$$

En algun cas es pot determinar l'estabilitat de l'origen pel mètode de linealització?

29. Estudieu l'estabilitat de l'origen per al sistema

$$\begin{cases} x' &= xy^2 + \mu x^3, \\ y' &= -2x^2y + \mu y^3. \end{cases}$$

[Ind.: Useu una funció del tipus $V(x, y) = ax^2 + by^2$.]

30. Considerem l'EDO no lineal de segon ordre $x'' = -a \sin x - b x'$, on $a > 0$ i $b \geq 0$ són paràmetres (correspon a l'equació del pèndol, vegeu el problema 39). Estudieu l'estabilitat dels seus punts d'equilibri aplicant el mètode de linealització (podeu usar el resultat del problema 26) i, quan sigui necessari, el mètode de Lyapunov usant la funció $V(x, y) = y^2/2 + a(1 - \cos x)$.

31. L'origen és un punt d'equilibri del sistema no lineal

$$\begin{cases} x' &= y + \alpha x^3, \\ y' &= -x/4 + \mu y + 2\alpha y^5. \end{cases}$$

- (a) Calculeu i classifiqueu el sistema linealitzat a l'origen en funció dels paràmetres.
- (b) Estudieu, quan $\mu \neq 0$, l'estabilitat del sistema no lineal pel mètode de linealització.
- (c) Estudieu, suposant $\mu = 0$, l'estabilitat del sistema no lineal pel mètode de Lyapunov usant una funció de la forma $V(x, y) = ax^2 + by^2$.

32. Considerem la següent EDO no lineal de segon ordre,

$$x'' + (\mu + 3x^2)x' + x = 0, \quad \mu \geq 0.$$

- (a) Proveu que si definim $y = x' + \mu x + x^3$, aleshores l'equació es pot reescriure com el següent sistema 2D,

$$\begin{cases} x' &= y - \mu x - x^3, \\ y' &= -x. \end{cases}$$

- (b) Determineu, quan sigui possible, l'estabilitat de l'origen pel mètode de linealització.
- (c) Usant la funció $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, estudieu l'estabilitat de l'origen pel mètode de Lyapunov per a $\mu = 0$.
- (d) Què es pot deduir sobre l'equació original?

33. Considerem el *sistema de Lorenz* (vegeu [Wikipedia](#) i [YouTube](#)):

$$\begin{cases} x'_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ x'_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2, \\ x'_3 &= x_1x_2 - \beta x_3, \end{cases}$$

on $\sigma, \rho, \beta > 0$ són paràmetres. Per simplificar, suposarem que $\rho > 1$.

- (a) Calculeu els seus tres punts d'equilibri.
- (b) Estudieu l'estabilitat de l'origen per al sistema de Lorenz.
- (c) Quin aspecte tenen les seves trajectòries prop de l'origen?
- (d) Aquest sistema, expandeix o contrau volums?

34. Considerem el *sistema de Rössler* (vegeu [Wikipedia](#) i [YouTube](#)):

$$\begin{cases} x'_1 &= -x_2 - x_3, \\ x'_2 &= x_1 + ax_2, \\ x'_3 &= (x_1 - b)x_3 + c, \end{cases}$$

on a , b i c són paràmetres.

- (a) Calculeu els punts d'equilibri del sistema quan $a \neq 0$.
- (b) Calculeu l'únic punt d'equilibri del sistema quan $a = c = 0$ i $b \neq 0$. Estudieu, per als valors de $b \neq 0$ en que sigui possible, la seva estabilitat pel mètode de linealització.
- (c) Calculeu els punts d'equilibri del sistema quan $a = b = c = 0$. Estudieu l'estabilitat pel mètode de linealització en tots els punts d'equilibri on sigui possible.
- (d) Suposem que $a > 0$ i $b = c$. Si una trajectòria parteix d'un punt del pla $x_1 = b$ tal que $x_2 \neq 0$, inicialment s'apropa o s'allunya de l'origen?

35. El punt $(1, 1)$ és d'equilibri per al sistema

$$\begin{cases} x' &= x(1 - y), \\ y' &= y(x - 1). \end{cases}$$

- (a) Classifiqueu el sistema linealitzat en aquest punt. La linealització decideix l'estabilitat?
- (b) Proveu que la funció $V(x, y) = x + y - \ln(xy)$ té un mínim local estricte en $(1, 1)$ i calculeu la seva derivada temporal.
- (c) Deduïu que el sistema té un *centre no lineal* al punt $(1, 1)$. Com es comporten les trajectòries al seu voltant?
- (d) A quines zones del pla (x, y) s'expandeixen àrees? I a quines es contrauen?

36. L'origen és un punt d'equilibri del sistema

$$\begin{cases} x'_1 &= \mu x_1^3 - 2x_2 + x_2x_3, \\ x'_2 &= \mu x_2^3 + x_1 - x_1x_3, \\ x'_3 &= \mu x_3^3 + x_1x_2, \end{cases}$$

essent μ un paràmetre real.

- (a) Estudieu, si és possible, l'estabilitat de l'origen pel mètode de linealització.
- (b) Estudieu l'estabilitat de l'origen per Lyapunov, usant una funció de la forma

$$V(\mathbf{x}) = \frac{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2}{2},$$

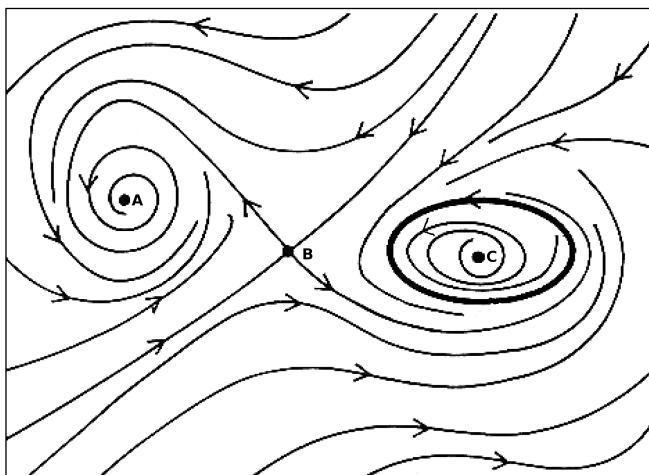
amb valors adequats per a c_1 , c_2 i c_3 .

- (c) Sigui $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ la solució que s'obté amb la condició inicial

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 1.$$

Per a quins valors de μ és decreixent la funció $x_2(t)$ per a $t = 0$? I per a quins és creixent? Per a quins valors de μ té un mínim local estricte la funció $x_2(t)$ per a $t = 0$? I per a quins té un màxim local estricte?

37. A la figura podem veure el *retrat de fase* d'un sistema autònom 2D, amb tres punts d'equilibri: A , B i C .



Retrat de fase d'un sistema autònom 2D.

- Classifiqueu els tres punts d'equilibri.
- Hi ha algun punt d'equilibri atractor? En cas afirmatiu, digueu quin i assenyalau la seva cuenca de atracció a la figura.
- Hi ha algun punt d'equilibri repulsor? En cas afirmatiu, digueu quin i expliqueu si les trajectòries que comencin prop d'aquest punt poden aproximar-se als altres dos punts d'equilibri. Justifiqueu les respostes.
- Existeix alguna solució periòdica no constant? En cas afirmatiu, digueu si és atractora, estable o repulsora.

Modelització (aplicacions de les EDOs)

38. Hom suposa que la fricció que frena la caiguda d'un paracaigudista és proporcional al quadrat de la velocitat. Si k és la constant de proporcionalitat, g l'acceleració de la gravetat i m la massa del paracaigudista, escriviu l'equació diferencial que compleix la velocitat $v(t)$, prenent el sentit de caiguda com a positiu (*equació del paracaigudista*). Calculeu la *velocitat terminal* v_∞ del paracaigudista; és a dir, la velocitat de caiguda per a la qual les forces de fricció i gravetat es compensen.
39. Tenim un pèndol de longitud l , del qual penja una massa m , sota un camp gravitatori d'intensitat g , i suposem que la *fricció* és proporcional a la velocitat, amb coeficient k .

- Justifiqueu que el moviment del pèndol ve modelitzat per la següent EDO no lineal de segon ordre:

$$\theta'' + m^{-1}k\theta' + l^{-1}g \sin \theta = 0,$$

on $\theta(t)$ és l'angle que forma el pèndol amb la vertical inferior. Quines dades necessitem per plantejar un PVI?

- Escriviu aquesta equació com un sistema d'EDOs no lineal (de primer ordre), introduint la velocitat angular $\omega = \theta'$.

- (c) Estudieu, si és possible, l'estabilitat de les dues posicions de equilibri del pèndol pel mètode de linealització.
- (d) Comproveu que l'energia mecànica total

$$V(\theta, \omega) = \frac{m}{2} l^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

no creix al llarg de les trajectòries. Al llarg de quines trajectòries es manté constant l'energia?

- (e) Proveu que el pèndol amb fricció no té cap trajectòria periòdica no constant.

40. Tenim una partícula de massa 1 que es desplaça sense fricció sobre una recta sota l'acció d'una força conservativa $F(x)$. Es diu que aquesta força prové d'un potencial $U(x)$ quan

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}(x).$$

D'acord amb la segona llei de Newton, la partícula compleix l'EDO de segon ordre

$$x'' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Introduint la velocitat $v = x'$, escriviu aquesta EDO de segon ordre com un sistema d'EDOs de primer ordre (*sistema conservatiu amb 1 grau de llibertat*).
- (b) L'energia (cinètica + potencial) de la partícula és

$$E(x, v) = v^2/2 + U(x).$$

Calculeu la derivada temporal de l'energia. Quina relació existeix entre les solucions del sistema i les corbes de nivell de l'energia? Quina relació existeix entre la gràfica del potencial i el croquis del sistema? Deduïu que, si en algun moment la partícula té energia E_0 , aleshores la seva energia potencial mai no supera el valor E_0 .

- (c) Proveu que $(x_*, 0)$ és un punt d'equilibri del sistema quan x_* és un punt crític del potencial, és a dir, quan $\frac{dU}{dx}(x_*) = 0$. Proveu que, a més, $(x_*, 0)$ és un punt d'equilibri inestable o un centre no lineal quan $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*)$ és positiva o negativa, respectivament.
- (d) Considerem la força que prové del potencial $U(x) = (x^2 - 1)^2$. Calculeu les posicions d'equilibri i l'estabilitat de cadascuna. Dibuixeu un croquis de les trajectòries. Pot escapar-se la partícula cap a $\pm\infty$? Per a quins valors de l'energia existeixen solucions fitades?
- (e) Feu el mateix per a la força que prové del potencial $U(x) = x^3/3 - x^2/2$.
41. El *pèndol de Wilberforce* (vegeu [Lebovitz, p. 87] i [YouTube](#)) consisteix en una massa que penja d'una molla flexible en forma d'esprial, que pot oscil·lar en mode longitudinal (amunt i avall) o torsional (girant), existint un petit acoblament entre els dos tipus de moviment.

Siguin $y(t)$ i $\theta(t)$ els desplaçaments des de la posició d'equilibri en aquests dos modes: oscil·lacions verticals i torsionals respectivament. Sigui m la massa, I el seu moment d'inèrcia, i ω_0^2 i ν_0^2 les constants de Hooke de la molla, longitudinal i torsional respectivament. Suposarem que l'acoblament entre els dos tipus de moviment consisteix en el fet que l'efecte que cadascun d'ells exerceix sobre l'altre és proporcional al seu propi desplaçament, amb una constant de proporcionalitat ε en ambdós casos. Si menyspreem les forces de fricció, les equacions del moviment són

$$\begin{cases} my'' + \omega_0^2 y &= \varepsilon \theta, \\ I\theta'' + \nu_0^2 \theta &= \varepsilon y. \end{cases}$$

Per simplificar, suposarem que $m = I = 1$, $\nu_0 = \omega_0$ i $|\varepsilon| < \omega_0^2$.

- (a) Transformeu aquest parell d'equacions lineals de segon ordre en un sistema lineal 4D de primer ordre, introduint noves funcions incògnita $z = y'$ i $\Omega = \theta'$.
- (b) Estudieu l'estabilitat del pèndol en la seva posició d'equilibri.
- (c) Proveu que existeixen unes freqüències ω_+ i ω_- tals que les funcions

$$y(t) = \cos(\omega_+ t) \cos(\omega_- t), \quad \theta(t) = \sin(\omega_+ t) \sin(\omega_- t)$$

són la solució del PVI format per les equacions del pèndol i les condicions inicials:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \theta(0) = \theta'(0) = 0.$$

Proveu que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_+ = \omega_0$ i $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_- = 0$. Interpreteu físicament el resultat com una transferència “pulsant” d'energia entre ambdós modes de moviment.

42. (a) Resoleu l'EDO lineal no homogènia de primer ordre a coeficients constants

$$c'(t) + pc(t) = q,$$

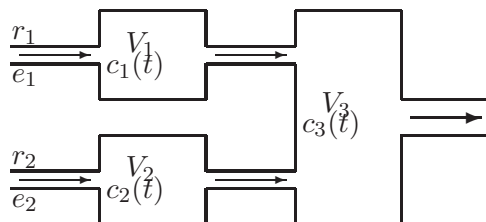
on $p > 0$ i $q \in \mathbb{R}$. Calculeu $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ en funció de p i q .

- (b) Resoleu l'EDO lineal no homogènia de primer ordre a coeficients constants

$$c'(t) + pc(t) = \beta e^{-lt},$$

on $l, p > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Distingiu els casos $l \neq p$ i $l = p$. Calculeu $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$.

- (c) Estudiem l'evolució de les *concentració de sal en tres dipòsits connectats* com s'indica a la figura, suposant que els seus volums V_1, V_2, V_3 (en m^3) es mantenen constants, i les entrades a els dos primers dipòsits tenen cabals r_1, r_2 (en m^3/h) i concentracions e_1, e_2 (en kg/m^3). Quins són els tres cabals de sortida? Siguin $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ les concentracions de sal a l'instant t (en kg/m^3). Plantegeu el sistema d'EDOs lineals no homogènies de primer ordre a coeficients constants que compleixen aquestes concentracions.
- (d) Usant els apartats anteriors, calculeu els límits de les tres concentracions quan el $t \rightarrow \infty$, en funció dels cabals i concentracions d'entrada, tot comprovant que aquests límits no depenen de les concentracions inicials a cada dipòsit. Interpreteu físicament aquests límits.



Tres dipòsits connectats.

43. Volem estudiar l'evolució en la concentració d'un contaminant als *llacs Erie i Ontario*, connectats per un riu que flueix del primer al segon. Siguin V_E i V_O els volums respectius, en mi^3 (milles cúbiques), i siguin r_E i r_O els cabals respectius de sortida, en mi^3/any . Es compleix que $r_O > r_E$, ja que el llac Ontario rep tot els que surt del llac Erie i quelcom més. Siguin e_E i e_O les concentracions de contaminants que entren a cada llac des de l'exterior, en kg/mi^3 . Siguin $c_E(t)$ i $c_O(t)$ les concentracions de contaminants que hi ha en cada llac a l'instant t .

Escriviu el sistema d'equacions diferencials que compleixen les funcions $c_E(t)$ i $c_O(t)$. És un sistema lineal? De manera intuïtiva, i sense resoldre el sistema, quin serà el límit d'aquestes concentracions

quan $t \rightarrow \infty$? Com es poden interpretar els quocients $p_E = r_E/V_E$ i $p_O = r_O/V_O$? Finalment, calculeu la solució general si considerem els valors:

$$V_E = 116, \quad V_O = 393, \quad r_E = 85, \quad r_O = 99.$$

[*Obs.*: En realitat, aquest problema es planteja de manera simultània per als cinc Grans Llacs: Superior, Michigan, Huron, Erie i Ontario (vegeu el model complet a [Bender] i [McKelvey]).]

44. Aboquem en un tanc d'aigua un *compost granulat* esfèricament, sol·luble en aigua. Quan les condicions de temperatura i concentració varien poc, és raonable suposar que (la massa de) cada gra es dissol de manera proporcional a la seva superfície. Sigui $k > 0$ la constant de proporcionalitat i ρ la densitat del compost. Escriviu l'equació diferencial que satisfà el radi $r(t)$ d'un gra. Quines són les unitats de k ?
45. La *desintegració radioactiva* (vegeu Wikipedia i un applet de Java) d'una partícula inestable és un procés aleatori que no pot ésser predit, però és sabut que aquesta desintegració és igualment probable en tots els instants. Per tant, donada una mostra d'un isòtop radioactiu, el nombre de desintegracions en un moment donat és proporcional al nombre d'àtoms radioactius existents en aquest moment.
Sigui λ la constant de proporcionalitat, que rep el nom de *constant de desintegració*. Plantegeu l'equació que compleix el nombre d'àtoms $N(t)$.
La *semivida* $t_{1/2}$ és el temps que ha de transcórrer perquè la meitat dels àtoms inicials s'hagin desintegrat. Relacioneu $t_{1/2}$ i λ .
46. La *datació per carboni-14* va permetre, l'any 1950, estimar la data en què es van fer les pintures rupestres de Lascaux. La semivida del ^{14}C és (aproximadament) de 5730 ± 40 anys. Sabent que una mostra de carbó de la cova de Lascaux va donar una mitjana de 0.97 desintegracions de ^{14}C per minut i gram, mentre que en arbres vius sol ésser de 6.68, estimeu la data de les pintures.
47. L'*estatocol·lector de Bussard* és un disseny molt optimista de nau estel·lar que ha aparegut a múltiples llibres de ciència-ficció (Niven, Benford, etc) i també és conegut pels trekkies. Consisteix en una nau que captura matèria estel·lar mitjançant un camp magnètic gegantí ancorat a la proa. Aquesta matèria és fusionada i expulsada en raig per la popa, impulsant d'aquesta manera la nau. L'avantatge d'aquest disseny és que no cal transportar combustible. La força d'impulsió generada en cada instant pels motors d'aquesta hipotètica nau és igual a la massa de matèria estel·lar capturada per unitat de temps multiplicada per la diferència entre la velocitat v_c del raig de partícules expulsades i la velocitat $v(t)$ de la nau. Escriviu l'equació diferencial que compleix $v(t)$. Identificar l'equació i descriure el comportament asimptòtic (quan $t \rightarrow \infty$) de la nau.
48. Un altre disseny de propulsió més realista que el del problema 47 són les *vels solars*, que utilitza la radiació solar per a impulsar-se. De fet, les agències espacials JAXA (japonesa) i NASA han dut a terme missions amb vels solars (*IKAROS* i *NanoSail-D* respectivament). L'impuls d'una vela solar és proporcional al nombre de fotons que impacten sobre ella. Escriviu l'equació diferencial que compleix la distància $d(t)$ de la vela al sol, tot menyspreant la fricció. Quan s'allunya del Sol, menys fotons impacten sobre la vela, amb la qual cosa la velocitat de la vela va disminuint... És correcte aquest "raonament"?
49. Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les densitats de població de dues espècies aïllades de preses i depredadors. Suposem que les interrelacions entre aquestes espècies compleixen els principis següents:
 - si no hi ha depredadors, la població de preses creix exponencialment (Malthus);
 - si no hi ha preses, la població de depredadors decreix exponencialment;
 - el nombre d'encontres entre un depredador i una presa és proporcional al producte de les dues densitats;

- cada encontre entre depredador i presa incrementa la població de depredadors i disminueix la població de preses.

Aleshores, el model que estem considerant (model Lotka–Volterra per a un *sistema depredador–presa*) ve donat pel següent sistema no lineal 2D,

$$\begin{cases} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(dx - c) \end{cases}$$

on les quantitats $a, b, c, d > 0$ són les constants de proporcionalitat que representen la interacció entre ambdues espècies.

- Calculeu, classifiqueu i dibuixeu un croquis del sistema linealitzat al voltant de l'origen.
- Trobeu l'altre punt d'equilibri del sistema. Calculeu, classifiqueu i dibuixeu un croquis del sistema linealitzat al voltant d'aquest segon punt d'equilibri.
- Determineu, si és possible, l'estabilitat dels punts d'equilibri en el sistema no lineal, pel mètode de linealització.
- El primer quadrant és l'únic amb sentit biològic. Proveu que aquest quadrant és invariant, mitjançant l'estudi del camp de vectors sobre els eixos de coordenades.
- Considerem la funció

$$V(x, y) = \gamma \ln x + \alpha \ln y - \delta x - \beta y,$$

definida al primer quadrant, on les quantitats α, β, γ i δ són paràmetres estrictament positius. Trobeu els valors que han de tenir aquests paràmetres (en funció de a, b, c i d) per tal que $V(x, y)$ sigui una integral primera (quantitat conservada) del sistema.

- Dibuixeu el retrat de fase global del sistema.

50. Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les densitats de població de dues espècies competitives, és a dir, dues espècies aïllades que competeixen per un recurs limitat. Modelitzem l'evolució de les poblacions mitjançant el següent sistema no lineal 2D,

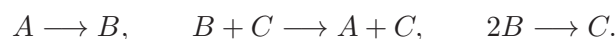
$$\begin{cases} x' = kx(1 - x/m - \alpha y), \\ y' = ly(1 - \beta x - y/n), \end{cases}$$

on tots els paràmetres que apareixen són positius. Per simplificar els càlculs, suposarem que

$$k = m = \alpha = 1, \quad l = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad n = 2.$$

- Calculeu els 4 punts d'equilibri del sistema, classifiqueu el sistema linealitzat en cadascun i estudeu, si és possible, la seva estabilitat pel mètode de linealització.
- La component x' s'anul·la a l'eix vertical i en una recta r , mentre que y' s'anul·la a l'eix horitzontal i en una recta s . És possible que una trajectòria que comença al primer quadrant (l'únic amb sentit biològic), salti a un altre quadrant? Justifiqueu la resposta. Calculeu i dibuixeu les rectes r i s . Aquestes rectes divideixen el primer quadrant en quatre regions. Descriviu el signe que tenen les quantitats x' i y' en cadascuna d'aquestes regions i interpreteu biològicament el resultat.
- Esbosseu el retrat de fase del sistema. Deduïu que, sota quasi qualsevol condició inicial, només sobreviu una de les dues espècies (principi d'exclusió competitiva).

51. En una *reacció química triple*, amb tres productes A, B i C , s'esdevenen simultàniament els processos



Suposarem que la *velocitat de reacció* de cada procés és proporcional al producte de les concentracions dels productes (mesurades en mol/l), necessàries perquè aquest procés concret es dugui a terme. Siguin

k_1 , k_2 i k_3 les tres constants de proporcionalitat. Plantegeu el sistema d'EDOs que compleixen las concentracions $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$. Quina és la concentració de cada producte a l'*equilibri químic*? És estable aquest equilibri? [Obs.: Podeu veure un model més adient, tot i que més complicat, a [\[Bender, p. 190–192\].](#)]

52. Tenim una mostra de líquid, on pul·lulen diverses espècies de *platihelminths fototròpics*, que neden sempre cap a la font de llum més propera. Cada espècie neda a una velocitat diferent. Per tal d'aïllar i “*pescar*” l'espècie que neda a velocitat v , col·loquem el líquid en un recipient cilíndric transparent de radi r . A continuació, fem girar el recipient amb velocitat angular ω situant-lo davant d'una única font lluminosa. Els platihelminths neden en direcció a la llum, en sentit contrari al gir del recipient. L'objectiu del problema és comprovar que tots els platihelminths d'una mateixa espècie s'acumulen en un únic punt.

Situant el centre del recipient a l'origen, la font lluminosa al punt $(r, 0)$, resulta que les trajectòries dels platihelminths compleixen el següent sistema autònom no lineal,

$$\begin{cases} x' &= -\omega y + \frac{v(r-x)}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}}, \\ y' &= \omega x - \frac{vy}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}}, \end{cases}$$

on el terme $(-\omega y, \omega x)$ prové de la rotació del recipient, i el terme $\frac{v(r-x, -y)}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}}$ representa el moviment dels platihelminths cap al punt de llum. Imposem la condició $v < \omega r$ per tal que els platihelminths no puguin arribar a la font lluminosa.

- Trobeu l'únic punt d'equilibri del sistema i proveu que és un atractor. [Ind.: El determinant de la matriu del sistema linealitzat no depèn de v .]
- Proveu que el sistema no té cap solució periòdica no constant.
- Per a quines posicions inicials $(x, y) \neq (r, 0)$ els platihelminths s'allunyen del centre del recipient? Per a quines posicions inicials s'hi apropen?

EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALES (EDPs)

Les equacions clàssiques

- Proveu que el *canvi de funció* $u = e^w$ transforma l'EDP no lineal de segon ordre $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$ en una equació de calor 1D homogènia.
- Sigui $u(x, t)$ una solució del següent *problema de calor 1D*, amb condicions de Dirichlet homogènies:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & 0 < x < L & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 & & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & & t > 0 \end{cases}$$

Proveu que la funció $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t) dx$ no és mai és creixent. Quan és constant? I quan és estrictament decreixent? Interpreteu físicament el resultat en termes de “*dissipació*” de la calor.

- Donada una solució $u(x, t)$ de l'equació $\rho u_{tt} = \tau u_{xx}$ per a una *corda vibrant*, definim la seva *densitat d'energia* i el seu *flux d'energia* com les funcions

$$e(x, t) = \frac{\rho u_t^2(x, t)}{2} + \frac{\tau u_x^2(x, t)}{2}, \quad f(x, t) = -\tau u_t(x, t) u_x(x, t),$$

respectivament.

(a) Proveu que $e_t + f_x = 0$.

(b) Suposem ara que $u(x, t)$ és solució del problema següent, amb condicions de Neumann homogènies,

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \tau u_{xx} & 0 < x < L & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \\ u_x(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u_x(L, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proveu que l'energia total de la corda vibrant, definida per $E(t) := \int_0^L e(x, t) dx$, és constant (conservació de l'energia en ones 1D).

(c) Trobeu unes altres condicions de frontera, que no siguin les de Neumann homogènies, que també conservin l'energia.

(d) Expresseu l'energia inicial en funció de la posició i velocitat inicials.

4. Considerem el problema següent, associat a l'equació d'ones i amb condicions de contorn periòdiques,

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in (-L, L), & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-L, L), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (-L, L), \\ u(-L, t) = u(L, t), & t \in \mathbb{R}, \\ u_x(-L, t) = u_x(L, t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $u(x, t)$ n'és solució, calculeu la seva mitjana $h(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) dx$ a partir de la funció $f(x)$ donada. [Ind.: Comenceu calculant $h''(t)$.]

5. Resoleu el problema següent, que correspon a una corda vibrant infinita sota l'acció d'una força externa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

amb $F(x, t) = (t^2 + 2) \sin x$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$ i $c = 1$. Proveu que la solució obtinguda no és igual a la superposició de dues ones viatjant en sentits oposats a velocitat $c = 1$.

6. Volem resoldre el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin t + \cos x & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Trobeu una solució particular $z(t)$, que no depengui de la posició, de l'equació $u_{tt} - u_{xx} = \sin t$. Trobeu una solució particular $w(x)$, que no depengui del temps, de l'equació $u_{tt} - u_{xx} = \cos x$.

(b) Proveu que el canvi $v(x, t) = u(x, t) - w(x) - z(t)$ ens permet homogeneïtzar l'EDP. Concretament, transforma el problema original en el problema següent:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Calculeu les funcions $f(x)$ i $g(x)$.

(c) Resoleu el nou problema, aplicant la fórmula de D'Alembert i, a continuació, recupereu la solució del problema original.

(d) Resoleu el problema directament, aplicant la fórmula de D'Alembert per al cas no homogeni.

Separació de variables

7. Sigui $u(x, t)$ una solució del següent problema de *calor 1D amb condicions de frontera mixtes*:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

(a) Trobeu una expressió de la derivada de la funció

$$T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$$

que només depengui de $u_x(0, t)$.

(b) Calculeu la solució $u(x, t)$ quan la temperatura inicial és $f(x) = 2 \sin(x/2) \cos x$. [Ind.: Podeu usar la fórmula trigonomètrica $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.]

(c) Proveu que la funció $T(t)$ obtinguda per a $f(x) = 2 \sin(x/2) \cos x$ té un mínim global a l'instant $t_* = (\ln 3)/2$, i tendeix a zero quan $t \rightarrow \infty$.

8. Volem comparar els mètodes de D'Alembert i de separació de variables, en resoldre un problema d'ones 1D amb condicions de frontera de tipus Dirichlet homogènies.

(a) Calculeu, aplicant la fórmula de D'Alembert, la solució del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quan la posició inicial ve donada per la funció $f(x) = 2 \sin x$ i la corda està inicialment en repòs. Comproveu que la solució obtinguda compleix les condicions

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Continuant amb una corda inicialment en repòs, quines propietats ha de tenir la posició inicial $f(x)$ per assegurar que la solució obtinguda mitjançant la fórmula de D'Alembert compleix aquestes dues condicions de frontera de tipus Dirichlet?

(b) Calculeu, aplicant el mètode de separació de variables, la solució del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quan la posició inicial ve donada per la funció $f(x) = 2 \sin x$

(c) Comproveu que les solucions obtingudes als apartats anteriors coincideixen.

9. Considerem el següent problema de *calor 1D amb condicions de frontera periòdiques*:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (-L, L) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (-L, L) \\ u(-L, t) = u(L, t) & t > 0 \\ u_x(-L, t) = u_x(L, t) & t > 0 \end{cases}$$

- (a) Donada una solució $u(x, t)$, calculeu la derivada de la funció

$$T(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) dx.$$

- (b) Trobeu els equilibris tèrmics del problema, és a dir, les temperatures que compleixen l'EDP i les condicions de frontera, però que no depenen del temps.

- (c) Calculeu $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ en funció de $f(x)$.

[Ind.: Suposant que coneixem el desenvolupament de Fourier $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$ de la temperatura inicial a l'interval $[-L, L]$, imposeu directament que la sèrie formal $u(x, t) = \alpha_0(t)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)]$ és solució del problema, sense seguir al peu de la lletra el mètode de separació de variables.]

- (d) Interpreteu físicament els resultats obtinguts. Es tendeix més ràpidament al límit anterior quan la longitud L del filferro és gran o petita? I s'hi tendeix més ràpidament quan la constant k^2 és gran o petita? I s'hi tendeix més ràpidament quan l'índex n del mode normal és gran o petit?

10. Considerem una *corda vibrant*, de longitud L i densitat lineal constant ρ , sotmesa a una tensió constant τ i que es mou en un medi amb *fricció* de coeficient μ , i amb *extrems fixats* de manera que $u(0, t) = 0 = u(L, t)$. Es deixa anar la corda des d'una posició inicial $f(x)$ en estat de repòs. Suposem que no actuen forces externes sobre la corda.

- (a) Escriviu les equacions que modelitzen la vibració de la corda.

- (b) Calculeu la vibració de la corda quan no hi ha fricció, suposant que el desenvolupament de Fourier de la temperatura inicial és $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x/L)$. Apliqueu el resultat al cas $L = \pi$ i $f(x) = \sin^3 x$.

- (c) Calculeu la vibració de la corda quan existeix una petita fricció: $0 < \mu \ll 1$. Comproveu que, si hi ha fricció, la corda tendeix al equilibri elàstic quan $t \rightarrow \infty$.

- (d) Què passa quan $\mu \rightarrow 0^+$? Interpreteu físicament la relació entre les freqüències de vibració de la corda i la seva longitud L , la seva densitat lineal ρ , la tensió τ , el coeficient de fricció μ i l'índex n que enumera els modes normals.

11. Considerem el problema següent, corresponent a l'equació de Laplace amb condicions de frontera de tipus Dirichlet al rectangle $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in (0, \pi) \quad y \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(x, 2\pi) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ u(\pi, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

Calculeu la solució formal d'aquest problema suposant que el desenvolupament de Fourier en sinus de $f(x)$ a l'interval $[0, \pi]$ és $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$.