

EQUACIONS EN DERIVADES PARCIAIS (EDPs)

Problemes resolts

Equacions Diferencials

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Albert Compta i Rafael Ramírez

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Versió: Setembre 2022

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Les equacions clàssiques

1. *Proveu que el canvi de funció $u = e^w$ transforma l'EDP no lineal de segon ordre $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$ en una equació de calor 1D homogènia.*

Solució: Necessitem relacionar les derivades parcials de la funció $u(x, t)$ amb les derivades parcials de la funció $w(x, t)$. Aplicant repetidament la regla de la cadena, veiem que

$$\begin{aligned}u_x &= w_x e^w, \\u_{xx} &= (w_{xx} + (w_x)^2) e^w, \\u_t &= w_t e^w = (w_{xx} + (w_x)^2) e^w = u_{xx}.\end{aligned}$$

A la darrera igualtat hem usat l'EDP $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$. Així doncs, la funció $u(x, t)$ compleix una equació homogènia de la calor 1D amb $k = 1$.

2. *Sigui $u(x, t)$ una solució del següent problema de calor 1D, amb condicions de Dirichlet homogènies:*

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Proveu que la funció $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t) dx$ no és mai és creixent. Quan és constant? I quan és estrictament decreixent? Interpreteu físicament el resultat en termes de “dissipació” de la calor.

Solució: N'hi ha prou amb provar que la derivada de la funció $E(t)$ mai no és positiva:

$$\begin{aligned}E'(t) &= \int_0^L u(x, t) u_t(x, t) dx = k^2 \int_0^L u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\&= k^2 [u(x, t) u_x(x, t)]_{x=0}^{x=L} - k^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx = -k^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx \leq 0.\end{aligned}$$

Les propietats que hem usat són: derivada sota el signe d'integral (primera igualtat), l'equació de la calor (segona igualtat), una integració per parts (tercera igualtat) i les condicions de frontera tipus Dirichlet homogènies (quarta igualtat). A més, $E'(t) \equiv 0 \Leftrightarrow u_x(x, t) \equiv 0 \Leftrightarrow u(x, t) \equiv 0$, ja que $u(0, t) = u(L, t) = 0$. És a dir, la funció $E(t)$ és estrictament decreixent, excepte quan ens trobem a l'equilibri tèrmic del problema: $v(x) \equiv 0$.

La interpretació física és que, donat que la calor flueix lliurement i la temperatura es manté igual a zero als dos extrems, la temperatura tendeix al equilibri tèrmic $v(x) \equiv 0$.

3. Donada una solució $u(x, t)$ de l'equació $\rho u_{tt} = \tau u_{xx}$ per a una corda vibrant, definim la seva densitat d'energia i el seu flux d'energia com les funcions

$$e(x, t) = \frac{\rho u_t^2(x, t)}{2} + \frac{\tau u_x^2(x, t)}{2}, \quad f(x, t) = -\tau u_t(x, t) u_x(x, t),$$

respectivament.

(a) Proveu que $e_t + f_x = 0$.

(b) Supposem ara que $u(x, t)$ és solució del problema següent, amb condicions de Neumann homogènies,

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \tau u_{xx} & 0 < x < L & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \\ u_x(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u_x(L, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proveu que l'energia total de la corda vibrant, definida per $E(t) := \int_0^L e(x, t) dx$, és constant (conservació de l'energia en ones 1D).

(c) Trobeu unes altres condicions de frontera, que no siguin les de Neumann homogènies, que també conservin l'energia.

(d) Expresseu l'energia inicial en funció de la posició i velocitat inicials.

Solució: Recordem que ρ és la densitat lineal de la corda, mentre que τ és la tensió a la qual està sotmesa. Això permet interpretar el primer sumand de l'energia $E(t)$ com l'energia cinètica i el segon com l'energia elàstica (també anomenada energia potencial).

(a) Derivem la densitat d'energia: $e_t = \rho u_t u_{tt} + \tau u_x u_{xt} = \tau(u_t u_{xx} + u_x u_{tx}) = -f_x$.

(b) N'hi ha prou amb provar que la derivada de $E(t)$ és igual a zero:

$$E'(t) = \int_0^L e_t(x, t) dx = - \int_0^L f_x(x, t) dx = f(0, t) - f(L, t) = 0.$$

(c) $E'(t) = f(0, t) - f(L, t) = 0 \Leftrightarrow u_t(0, t) u_x(0, t) = u_t(L, t) u_x(L, t)$. Per tant, una altra possibilitat és posar condicions de Dirichlet constants, ja que aleshores $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$. I una altra més són les condicions periòdiques, ja que $u(0, t) = u(L, t)$ implica que $u_t(0, t) = u_t(L, t)$.

(d) L'energia inicial és $E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho g(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau (f'(x))^2 dx$.

4. Considerem el problema següent, associat a l'equació d'ones i amb condicions de contorn periòdiques,

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in (-L, L), & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-L, L), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (-L, L), \\ u(-L, t) = u(L, t), & t \in \mathbb{R}, \\ u_x(-L, t) = u_x(L, t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $u(x, t)$ n'és solució, calculeu la seva mitjana $h(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) dx$ a partir de la funció $f(x)$ donada. [Ind.: Comenceu calculant $h''(t)$.]

Solució: Usant l'EDP, la regla de Barrow i les condicions de contorn,

$$h''(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_{tt}(x, t) dx = \frac{c^2}{2L} \int_{-L}^L u_{xx}(x, t) dx = \frac{c^2}{2L} (u_x(L, t) - u_x(-L, t)) = 0.$$

Això implica que $h'(t)$ és constant i, com que $u_t(x, 0) = 0$,

$$h'(t) = h'(0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_t(x, 0) dx = 0.$$

Llavors $h(t)$ és també constant, i val

$$h(t) = h(0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, 0) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

5. Resoleu el problema següent, que correspon a una corda vibrant infinita sota l'acció d'una força externa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

amb $F(x, t) = (t^2 + 2) \sin x$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$ i $c = 1$. Proveu que la solució obtinguda no és igual a la superposició de dues ones viatjant en sentits oposats a velocitat $c = 1$.

Solució: Aplicant la fórmula de D'Alembert veiem que $u(x, t) = (\sin(x-t) + \sin(x+t))/2 + t + t^2 \sin x$. A continuació, suposem que existeixen unes funcions $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $u(x, t) = p(x+t) + q(x-t)$. Avaluant aquesta identitat (i la seva derivada respecte t) a l'instant $t = 0$, veiem que

$$p(x) + q(x) = \sin x, \quad p'(x) - q'(x) = 1,$$

i deduïm que $p(x) = (x + \sin x)/2 + k$ i $q(x) = (-x + \sin x)/2 - k$, amb alguna constant de integració $k \in \mathbb{R}$. Però hem arribat a una contradicció, ja que aquestes funcions no compleixen la identitat que estàvem suposant.

6. Volem resoldre el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin t + \cos x & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (a) Trobeu una solució particular $z(t)$, que no depengui de la posició, de l'equació $u_{tt} - u_{xx} = \sin t$. Trobeu una solució particular $w(x)$, que no depengui del temps, de l'equació $u_{tt} - u_{xx} = \cos x$.
- (b) Proveu que el canvi $v(x, t) = u(x, t) - w(x) - z(t)$ ens permet homogeneïtzar l'EDP. Concretament, transforma el problema original en el problema següent:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Calculeu les funcions $f(x)$ i $g(x)$.

- (c) Resoleu el nou problema, aplicant la fórmula de D'Alembert i, a continuació, recupereu la solució del problema original.
- (d) Resoleu el problema directament, aplicant la fórmula de D'Alembert per al cas no homogeni.

Solució: D'una banda, homogeneïtzant l'EDP ens queda $z(t) = -\sin t$, $w(x) = \cos x$, $f(x) = -\cos x$, $g(x) \equiv 1$, $v(x, t) = t - \cos t \cos x$ i $u(x, t) = u(x, t) + w(x) + z(t) = t - \sin t + (1 - \cos t) \cos x$. D'altra banda, aplicant directament la fórmula de D'Alembert obtenim

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} (\sin s + \cos y) dy \right\} ds = \frac{1}{2} \int_0^t [y \sin s + \sin y]_{y=x-t+s}^{y=x+t-s} ds \\ &= \int_0^t ((t-s) \sin s + \sin(t-s) \cos x) ds = t - \sin t + (1 - \cos t) \cos x. \end{aligned}$$

Separació de variables

7. Sigui $u(x, t)$ una solució del següent problema de calor 1D amb condicions de frontera mixtes:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0, \pi) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 & & t > 0 \end{cases}$$

- (a) Trobeu una expressió de la derivada de la funció

$$T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$$

que només depengui de $u_x(0, t)$.

- (b) Calculeu la solució $u(x, t)$ quan la temperatura inicial és $f(x) = 2 \sin(x/2) \cos x$. [Ind.: Podeu usar la fórmula trigonomètrica $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.]
- (c) Proveu que la funció $T(t)$ obtinguda per a $f(x) = 2 \sin(x/2) \cos x$ té un mínim global a l'instant $t_* = (\ln 3)/2$, i tendeix a zero quan $t \rightarrow \infty$.

Solució:

- (a) $T'(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_t(x, t) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_{xx}(x, t) dx = \frac{1}{\pi} (u_x(\pi, t) - u_x(0, t)) = -u_x(0, t)/\pi$.
- (b) Buscant $u(x, t) = X(x)T(t)$ obtenim les equacions $X''(x) = \lambda X(x)$ i $T'(t) = \lambda T(t)$ amb les condicions homogènies $X(0) = X(\pi) = 0$. Les condicions de Neumann donen els valors propis $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2$ i les funcions pròpies $X(x) = \sin((n + \frac{1}{2})x)$, $n \geq 0$. Aplicant aquests valors propis a la segona equació tenim: $T'_n(t) = -(n + \frac{1}{2})^2 T_n(t)$ amb solució $T_n(t) = e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t}$. La solució general és $u(x, t) = \sum_{n \geq 0} a_n X_n(x) T_n(t)$. Imposant el valor de la temperatura inicial tenim

$$u(x, 0) = 2 \sin(x/2) \cos x = \sin(3x/2) - \sin(x/2) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin((n + \frac{1}{2})x)$$

i per inspecció directa surt $a_0 = -1, a_1 = 1, a_n = 0$ si $n > 1$. Per tant,

$$u(x, t) = e^{-9t/4} \sin(3x/2) - e^{-t/4} \sin(x/2).$$

- (c) Per l'apartat (a) sabem que $T'(t) = (e^{-t/4} - 3e^{-9t/4})/2\pi = (1 - 3e^{-2t})e^{-t/4}/2\pi$. Llavors, s'anul·la per a $t = (\ln 3)/2$, és negativa si $t < (\ln 3)/2$ i positiva si $t > (\ln 3)/2$. Això ens diu que és un mínim global.

$$\text{Finalment, } \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} (e^{-9t/4} \int_0^\pi \sin(3x/2) dx - e^{-t/4} \int_0^\pi \sin(x/2) dx) = 0$$

8. Volem comparar els mètodes de D'Alembert i de separació de variables, en resoldre un problema d'ones 1D amb condicions de frontera de tipus Dirichlet homogènies.

- (a) Calculeu, aplicant la fórmula de D'Alembert, la solució del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quan la posició inicial ve donada per la funció $f(x) = 2 \sin x$ i la corda està inicialment en repòs. Comproveu que la solució obtinguda compleix les condicions

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Continuant amb una corda inicialment en repòs, quines propietats ha de tenir la posició inicial $f(x)$ per assegurar que la solució obtinguda mitjançant la fórmula de D'Alembert compleix aquestes dues condicions de frontera de tipus Dirichlet?

- (b) Calculeu, aplicant el mètode de separació de variables, la solució del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quan la posició inicial ve donada per la funció $f(x) = 2 \sin x$

- (c) Comproveu que les solucions obtingudes als apartats anteriors coincideixen.

Solució:

- (a) Segons d'Alembert, la solució és $u(x, t) = \sin(x + ct) + \sin(x - ct) = 2 \cos(ct) \sin x$. En ser $\sin 0 = \sin \pi = 0$, és obvi que $u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Aplicant altra vegada la fórmula d'Alembert, per assegurar que la solució compleixi aquesta última condició, la posició inicial ha de satisfer que $f(ct) + f(-ct) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ i que $f(\pi + ct) + f(\pi - ct) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. La primera igualtat diu que $f(x)$ és senar i la segona, usant que és senar ($f(\pi - ct) = -f(ct - \pi)$) diu que $f(x)$ és 2π -periòdica.

- (b) Buscant $u(x, t) = X(x)T(t)$ obtenim les equacions $X''(x) = \lambda X(x)$ i $T''(t) = \lambda c^2 T(t)$ amb les condicions homogènies $X(0) = X(\pi) = 0, T'(0) = 0$. Les condicions de Dirichlet donen els valors propis $\lambda_n = -n^2$ i les funcions pròpies $X(x) = \sin(nx), n \geq 1$. Aplicant aquests valors propis a la segona equació tenim que $T_n''(t) = -n^2 c^2 T_n(t)$ amb solució general $T_n(t) = c_1 \cos(cnt) + c_2 \sin(cnt)$. Imposant que $T'(0) = 0$ resulta $c_2 = 0$.

La solució general és $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx) \cos(cnt)$. Imposant el valor de la posició inicial tenim $u(x, 0) = 2 \sin x = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx)$ i per inspecció directa surt $a_1 = 1, a_n = 0$ si $n > 1$. Per tant, $u(x, t) = 2 \sin(x) \cos(ct)$.

9. Considerem el següent problema de calor 1D amb condicions de frontera periòdiques:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (-L, L) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (-L, L) \\ u(-L, t) = u(L, t) & t > 0 \\ u_x(-L, t) = u_x(L, t) & t > 0 \end{cases}$$

(a) Donada una solució $u(x, t)$, calculeu la derivada de la funció

$$T(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) dx.$$

(b) Trobeu els equilibris tèrmics del problema, és a dir, les temperatures que compleixen l'EDP i les condicions de frontera, però que no depenen del temps.

(c) Calculeu $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ en funció de $f(x)$.

[Ind.: Suposant que coneixem el desenvolupament de Fourier $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$ de la temperatura inicial a l'interval $[-L, L]$, imposeu directament que la sèrie formal $u(x, t) = \alpha_0(t)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)]$ és solució del problema, sense seguir al peu de la lletra el mètode de separació de variables.]

(d) Interpreteu físicament els resultats obtinguts. Es tendeix més ràpidament al límit anterior quan la longitud L del filferro és gran o petita? I s'hi tendeix més ràpidament quan la constant k^2 és gran o petita? I s'hi tendeix més ràpidament quan l'índex n del mode normal és gran o petit?

Solució:

(a) $T'(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{2L} \int_{-L}^L u_{xx}(x, t) dx = k^2 (u_x(L, t) - u_x(-L, t))/2L = 0.$

(b) Les solucions que no depenen del temps compleixen $u_{xx} = 0$ i, per tant $u(x) = ax + b$. Les condicions frontera són, llavors, $u(-L) = -aL + b = u(L) = aL + b$ i $u'(-L) = a = u'(L)$; la primera condició ens diu que $a = 0$ i la segona no diu res. Per tant, els únics equilibris tèrmics són les temperatures constants ($u(x) = b$).

(c) Imposant que la sèrie formal $u(x, t) = \alpha_0(t)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)]$ és solució del problema, tenim que $u_t(x, t) = \alpha'_0(t)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha'_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta'_n(t) \sin(n\pi x/L)]$ ha de ser igual a $k^2 u_{xx}(x, t) = -(k\pi n/L)^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)]$. D'aquí surt que $\alpha_0(t) = a_0$, $\alpha_n(t) = a_n e^{-(k\pi n/L)^2 t}$, $\beta_n(t) = b_n e^{-(k\pi n/L)^2 t}$ i la solució formal és

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(k\pi n/L)^2 t} (a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)).$$

Per tant, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = a_0/2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$, ja que les exponencials tendeixen a zero.

(d) Interpretacions:

La temperatura mitjana es manté constant, ja que els fluxs de calor pels extrems es compensen.

La calor tendeix a distribuir-se uniformement i per això la temperatura tendeix a un valor constant (equilibri tèrmic).

Aquest valor constant coincideix amb la mitjana de la temperatura inicial.

Els exponents $-(k\pi n/L)^2$ de les exponencials són més negatius, i per tant es tendeix més ràpidament al límit, com més grans són la constant k^2 i l'índex n , i com més petita és la longitud L .

10. Considerem una corda vibrant, de longitud L i densitat lineal constant ρ , sotmesa a una tensió constant τ i que es mou en un medi amb fricció de coeficient μ , i amb extrems fixats de manera que $u(0, t) = 0 = u(L, t)$. Es deixa anar la corda des d'una posició inicial $f(x)$ en estat de repòs. Suposem que no actuen forces externes sobre la corda.

- (a) Escriuiu les equacions que modelitzen la vibració de la corda.
- (b) Calculeu la vibració de la corda quan no hi ha fricció, suposant que el desenvolupament de Fourier de la temperatura inicial és $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x/L)$. Apliqueu el resultat al cas $L = \pi$ i $f(x) = \sin^3 x$.
- (c) Calculeu la vibració de la corda quan existeix una petita fricció: $0 < \mu \ll 1$. Comproveu que, si hi ha fricció, la corda tendeix al equilibri elàstic quan $t \rightarrow \infty$.
- (d) Què passa quan $\mu \rightarrow 0^+$? Interpreteu físicament la relació entre les freqüències de vibració de la corda i la seva longitud L , la seva densitat lineal ρ , la tensió τ , el coeficient de fricció μ i l'índex n que enumera els modes normals.

Solució:

- (a) La velocitat inicial és $g(x) \equiv 0$, ja que la corda està inicialment en repòs. Per tant,

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = -\mu u_t + \tau u_{xx} & 0 < x < L \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

- (b) Quan $\mu = 0$, la vibració de la corda és

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \cos(\omega_n t) \sin(n\pi x/L),$$

on $c^2 = \tau/\rho$ i $\omega_n = n\pi c/L$ és la freqüència de vibració del mode normal n -èsim. Quan $L = \pi$ i $f(x) = \sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4$, obtenim

$$v(x, t) = \frac{3}{4} \sin x \cos ct - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3ct.$$

- (c) Quan $0 < \mu \ll 1$, la vibració de la corda és

$$u(x, t) = e^{-kt} \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{\nu_n} (\nu_n \cos(\nu_n t) + k \sin(\nu_n t)) \sin(n\pi x/L)$$

on $c^2 = \tau/\rho$, $2k = \mu/\rho$, $\omega_n = n\pi c/L$ i $\nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - k^2}$ és la “freqüència de vibració” del mode normal n -èsim. Aquesta expressió és correcta si i només si $k < \omega_n$ per a tot $n \geq 1$. Per tant, necessitem que $L\mu\sqrt{\rho} < 2\pi\sqrt{\tau}$, i per tant el coeficient de fricció no pot ser massa gran.

Aquesta vibració compleix que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ per a tot $x \in [0, L]$, a causa del factor e^{-kt} .

- (d) $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} u(x, t) = v(x, t)$. Les freqüències $\omega_n = n\pi\tau^{1/2}\rho^{-1/2}L^{-1}$ i $\nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - k^2}$ són més grans quan la corda és curta (L petita), lleugera (ρ petita), tibant (τ gran), o l'índex n és gran. A més, ν_n decreix quan la fricció augmenta.

11. Considerem el problema següent, corresponent a l'equació de Laplace amb condicions de frontera de tipus Dirichlet al rectangle $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in (0, \pi) \quad y \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(x, 2\pi) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ u(\pi, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

Calculeu la solució formal d'aquest problema suposant que el desenvolupament de Fourier en sinus de $f(x)$ a l'interval $[0, \pi]$ és $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$.

Solució: Buscant $u(x, y) = X(x)Y(y)$ obtenim les equacions $X''(x) = \lambda X(x)$ i $Y''(y) = -\lambda Y(y)$ amb les condicions homogènies $X(0) = X(\pi) = 0$, $Y(2\pi) = 0$. Les condicions de Dirichlet donen els valors propis $\lambda_n = -n^2$ i les funcions pròpies $X(x) = \sin(nx)$, $n \geq 1$. Aplicant aquests valors propis a la segona equació tenim que $Y_n''(y) = n^2 Y_n(y)$ amb solució $Y_n(y) = c_1 \cosh(ny) + c_2 \sinh(ny)$. Imposant que $Y(2\pi) = 0$ resulta $c_1 = -c_2 \frac{\sinh(2\pi n)}{\cosh(2\pi n)}$.

Podem prendre $Y_n(y) = \sinh(2\pi n) \cosh(ny) - \cosh(2\pi n) \sinh(ny) = \sinh(2\pi n - ny)$.

La solució general és $u(x, y) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx) \sinh(2\pi n - ny)$.

Imposant $u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx) \sinh(2\pi n) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$ resulta que

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{\sinh(n(2\pi - y))}{\sinh(2\pi n)} \sin nx.$$