

EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES (EDOs)

Problemes resoltos

Equacions Diferencials

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Albert Compta i Rafael Ramírez

Departament de Matemàtiques

ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Versió: Febrer 2021

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

Nota: Tot el text subratllat són enllaços a pàgines web que poden ajudar a entendre millor cada problema, o bé ampliar informació.

Conceptes i teoremes generals sobre sistemes d'EDOs

1. Sigui $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$.

- (a) Quina relació existeix entre les òrbites dels sistemes $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}' = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$? I entre les seves trajectòries?
- (b) Mateixa qüestió per als sistemes $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}' = 2\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Solució:

- (a) En cada punt els vectors tangents $\mathbf{x}'$ d'un sistema i de l'altre són iguals però amb sentit oposat, per tant les òrbites són les mateixes i les trajectòries oposades (una en sentit contrari de l'altra i amb la mateixa velocitat)
- (b) En cada punt el vector tangent del segon sistema és el doble del vector tangent del primer, per tant les òrbites són les mateixes i són recorregudes en el mateix sentit i amb doble velocitat en el segon cas.

2. Considerem el camp de vectors associat al sistema

$$\begin{cases} x' &= x(1-y), \\ y' &= y(x-1). \end{cases}$$

En quins punts el camp de vectors és horitzontal? I vertical? Sabent que totes les trajectòries contingudes al primer quadrant donen voltes entorn del punt $(1,1)$, determineu el sentit de gir (horari o antihorari) d'aquestes trajectòries.

Solució: El camp és horitzontal quan $y' = 0$, és a dir si $y = 0$ o $x = 1$. El camp és vertical quan $x' = 0$, és a dir si $x = 0$ o $y = 1$. Si totes les trajectòries del primer quadrant donen voltes entorn del punt $(1, 1)$, com que el vector tangent en el punt $(2, 1)$ és $\mathbf{F}(2, 1) = (0, 1)$, resulta que el sentit de gir és antihorari.

3. Considerem les trajectòries del següent sistema no lineal 2D,

$$\begin{cases} x' &= y, \\ y' &= (1 - x^2)y - x. \end{cases}$$

- (a) Veient que la velocitat a l'origen és nul·la, pot passar una trajectòria per l'origen sense quedar-s'hi? Per què?
- (b) Si una trajectòria parteix d'un punt de la recta $x = 1$, inicialment es mourà cap amunt o cap avall?
- (c) Descriu el lloc geomètric dels punts (x, y) en els quals el mòdul de la velocitat de la trajectòria coincideix amb la distància a l'origen.

Solució:

- (a) No. Com que la trajectòria $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ és una solució del sistema, pel teorema d'existència i unicitat de solucions no pot existir una altra solució que passi per l'origen.
- (b) Si $x = 1$, aleshores $y' = -1 < 0$, i per tant la trajectòria es mou inicialment cap avall.
- (c) El mòdul de la velocitat en un punt (x, y) és

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + y(1 - x^2)((1 - x^2)y - 2x)}.$$

La distància del punt (x, y) a l'origen és $\sqrt{x^2 + y^2}$. Per tant, hem de resoldre l'equació

$$y(1 - x^2)((1 - x^2)y - 2x) = 0.$$

El lloc geomètric dels punts que compleixen l'equació anterior està format per la recta horitzontal $y = 0$, les dues rectes verticals $x = \pm 1$ i la gràfica de la funció $y = 2x/(1 - x^2)$.

4. Segui $x(t)$ la solució del problema de valor inicial (PVI) següent, associat a una EDO de primer ordre no autònom:

$$x' = (t - x)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Per a quines condicions inicials (t_0, x_0) és constant la funció $x(t)$; és a dir, $x(t) \equiv x_0$? Per a quines condicions inicials té $x(t)$ un màxim local estricte en $t = t_0$? I un mínim?

Solució:

- (a) Si $x(t) = x_0$ per a qualsevol valor de t , la derivada $x'(t) = 0$, $\forall t$; això vol dir que $(t - x_0)x_0 = 0$, $\forall t$, és a dir que: $x_0 = 0$.
- (b) Perquè la solució $x(t)$ tingui un extrem local en $t = t_0$ és necessari que $x'(t_0) = (t_0 - x_0)x_0 = 0$. Com que $x_0 \neq 0$ (sinó, per l'apartat anterior la solució seria constant), resulta que $x_0 = t_0$. En aquest cas, per veure si és un màxim o un mínim, estudiem la segona derivada en t_0 ; derivant l'equació en el punt: $x''(t_0) = (1 - x'(t_0))x_0 + (t_0 - x_0)x'(t_0) = x_0$. En resum, si $x_0 > 0$ tenim un mínim i si $x_0 < 0$ un màxim.

5. Seguin $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les solucions del PVI següent, associat a un sistema no lineal 3D autònom:

$$\begin{cases} x' = yz & x(0) = 0, \\ y' = -xz & y(0) = 1, \\ z' = -xy & z(0) = 1. \end{cases}$$

Alguna de les tres funcions té un mínim local estricta en $t = 0$? I un màxim?

Solució: En primer lloc, avaluem les primeres derivades usant el sistema:

$$x'(0) = y(0)z(0) = 1 \neq 0, \quad y'(0) = -x(0)z(0) = 0, \quad z'(0) = -x(0)y(0) = 0.$$

Així doncs, la funció $x(t)$ no té un punt crític en $t = 0$. Derivem el sistema per tal de calcular les derivades segones de les funcions que tenen un punt crític en $t = 0$:

$$y''(0) = -x'(0)z(0) - x(0)z'(0) = -1 < 0, \quad z''(0) = -x'(0)y(0) - x(0)y'(0) = -1 < 0.$$

Deduïm $x(t)$ és creixent en $t = 0$, mentre que $y(t)$ i $z(t)$ tenen un màxim local estricta en $t = 0$.

6. Dibuixeu el retrat de fase de la següent EDO de primer ordre autònoma:

$$x' = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calculeu tots els seus punts d'equilibri i determineu la seva estabilitat.
- (b) Existeix alguna solució que escapi a $\pm\infty$? Raoneu la resposta.
- (c) Existeix alguna solució 2π -periòdica no constant? Raoneu la resposta.
- (d) Donades dues solucions arbitràries no constants $x_1(t)$ i $x_2(t)$, considereu els límits

$$x_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t), \quad x_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t).$$

Quins possibles valors pot tenir la diferència $x_1(\infty) - x_2(\infty)$?

Solució:

- (a) Els punts d'equilibri compleixen $\sin x = 0$, i per tant són $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. La solució creix quan $x' = \sin x > 0$ i decreix quan $x' = \sin x < 0$. Per tant, si denotem $I_n = (x_n, x_{n+1})$ els intervals delimitats pels punts d'equilibri, veiem que la solució $x(t)$ creix quan està continguda en I_n amb n parell, però decreix si n és senar. Aleshores els punts d'equilibri x_n són repulsors si n és parell i atractors si n és senar.
- (b) No, ja que qualsevol solució no constant està confinada entre dues posicions d'equilibri.
- (c) No, ja que qualsevol solució no constant està confinada entre dues posicions d'equilibri, tendint a una d'elles quan $t \rightarrow \infty$ i a l'altra quan $t \rightarrow -\infty$.
- (d) Múltiples enters de 2π , ja que $x_1(\infty)$ i $x_2(\infty)$ són punts d'equilibri atractors, és a dir, $x_1(\infty) = (2k_1 + 1)\pi$, $x_2(\infty) = (2k_2 + 1)\pi$ i $x_1(\infty) - x_2(\infty) = 2(k_1 - k_2)\pi$.

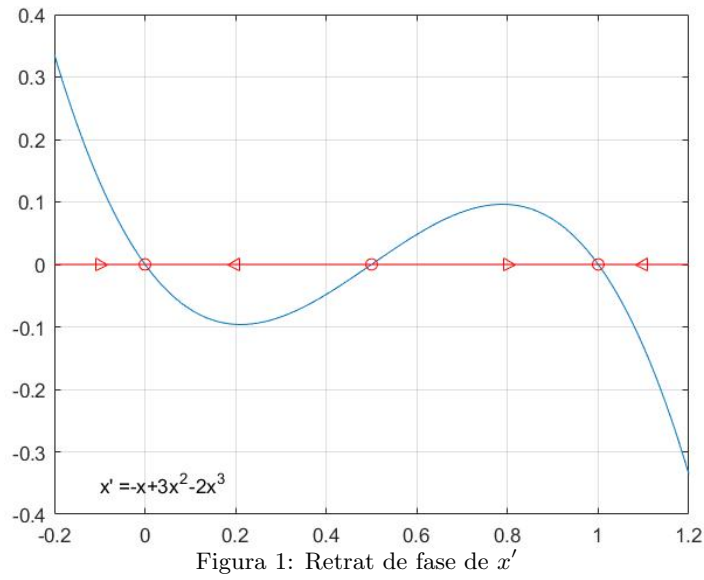
7. Dibuixeu el retrat de fase del següent sistema desacoblat 2D,

$$\begin{cases} x' &= -x + 3x^2 - 2x^3, \\ y' &= -2y. \end{cases}$$

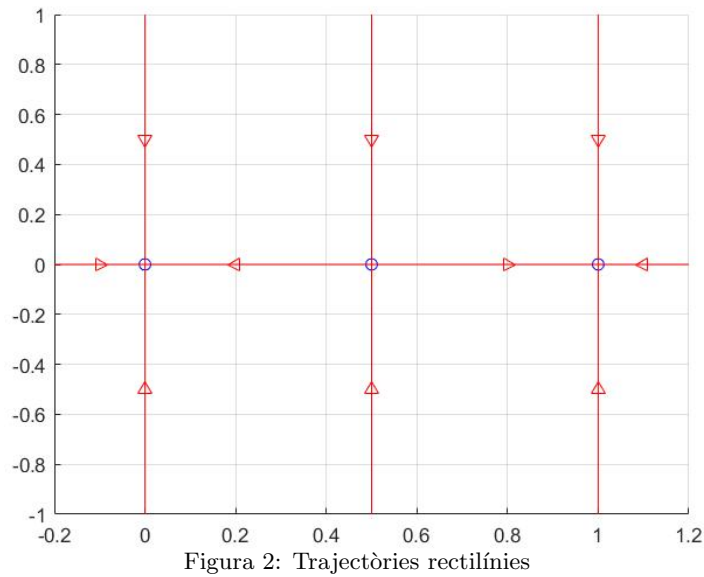
Per a cada punt d'equilibri atractor, determineu la seva conca d'atracció.

Solució: Hi ha tres punts d'equilibri (els punts solució del sistema $x' = y' = 0$): $(0, 0)$, $(1/2, 0)$ i $(1, 0)$. El segon és inestable no repulsor, els altres dos són atractors. Com que les equacions estan desacoblades, les podem estudiar per separat.

Per exemple, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{-2t} = 0$ per a qualsevol condició inicial y_0 .



L'equació de la component $x(t)$ s'estudia com l'equació logística.



Les conques d'atracció dels punts $(0,0)$ i $(1,0)$ són els semiplans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1/2\}$ i $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1/2\}$, respectivament. Els punts situats sobre la recta $x = 1/2$ són els únics que tendeixen al punt d'equilibri intermedi.

Sistemes d'EDOs lineals

8. Calculeu una matriu fonamental i la solució general del sistema lineal homogeni a coeficients constants $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, per a cadascuna de les matrius següents:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Solució: Si $X(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))$ és una matriu fonamental qualsevol, aleshores la solució general és $\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c}$. Per tant, és suficient calcular matrius fonamentals:

(a) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$.

$$\lambda_1 = -1, A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & \end{pmatrix}, \quad \ker(A + I) = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right], \quad \mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2, A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ & \end{pmatrix}, \quad \ker(A + I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per tant, una matriu fonamental és $X(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$,

(b) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ i les arrels son $\lambda = -1 \pm 2i$.

$$A - (-1 + 2i)I = \begin{pmatrix} -2 - 2i & -4 \\ & \end{pmatrix}, \quad \ker(A + I) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}(\cos 2t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-t}(\sin 2t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Per tant, una matriu fonamental és $X(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t & 2 \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t & -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix} e^{-t}$,

(c) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. $\lambda = -1$ és arrel doble i A no és diagonal.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & \end{pmatrix}, \quad \ker(A + I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Prenem $\mathbf{v}_1 \notin \ker(A + I)$, per exemple $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = (A + I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Llavors,

$$X(t) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

(On J és la forma de Jordan de A)

9. Calculeu la solució del PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, essent

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Té el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ alguna solució fitada per a tot $t \in \mathbb{R}$?

Solució: El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$. Considerant els valors propis $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 1$ tenim, respectivament,

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \ker(A + 2I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad \mathbf{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ker(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad \mathbf{x}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Llavors, la solució general del sistema és $\mathbf{x}_h(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-2t} + c_2e^t \\ c_2e^t \\ c_3e^t \end{pmatrix}$, amb $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ lliures. Per tant, l'única solució del sistema fitada per a tot $t \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ ja que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ però $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$.

La solució del PVI s'obté resolent el sistema

$$\mathbf{x}_h(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i dona $c_1 = c_3 = 1$ i $c_2 = 2$; és a dir, $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

10. Resoleu els PVI's donats per cadascuna de les EDOs lineals de segon ordre següents,

(a) $x'' + 4x' = 0$, (b) $x'' + 4x' + 4x = 0$, (c) $x'' + 4x' + 5x = 0$,

amb les condicions inicials $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

Solució:

(a) Fem el canvi $y = x'$ i resulta el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La solució general és $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-4t} \\ 0 & -4e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Imposant les condicions inicials tenim el sistema $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ que dona $c_1 = c_2 = 1/2$ i la solució és $x(t) = 1/2(1 + e^{-4t})$.

(b) Fem el canvi $y = x'$ i resulta el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. El polinomi característic té l'arrel doble $\lambda = -2$, una base de Jordan és $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ i la solució general és

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Imposant les condicions inicials tenim el sistema $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ que dona $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$ i la solució és $x(t) = e^{-2t}$.

(c) Fem el canvi $y = x'$ i resulta el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

El polinomi característic té arelles complexes $\lambda = -2 \pm i$. Un vector propi de valor propi $-2 + i$ és $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solució general és $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (\cos t \mathbf{u} - \sin t \mathbf{w}, \sin t \mathbf{u} + \cos t \mathbf{w}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Imposant les condicions inicials tenim el sistema $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ que dona $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ i la solució és $x(t)e^{-2t} \cos t$.

Observació: També el podem fer usant el Lema de la pàgina 43 dels apunts fent el polinomi característic de l'equació que ens dona directament la forma de la solució general, derivem aquesta solució general i imposem les condicions inicials de la funció i la seva derivada per obtenir el valor de les constants c_1, c_2 .

11. *Resoleu, aplicant el mètode de variació de les constants, els sistemes no homogenis $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, essent*

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

$$(c) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

Solució:

- (a) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$. Un vector propi de valor propi 0 és $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i un de valor propi 1 és $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Una matriu fonamental i la seva inversa són: $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}$, $X(t)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$.

Busquem $\mathbf{u}(t)$ tal que $\mathbf{u}'(t) = X(t)^{-1}\mathbf{b}(t)$:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resolent el sistema d'equacions tenim que $u_1(t) = -11t$, $u_2(t) = -5e^{-t}$.

La solució general és $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t)\mathbf{u}(t)$ sent $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures:

$$\mathbf{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 15 + 11t \\ 10 + 11t \end{pmatrix}.$$

- (b) El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Un vector propi de valor propi 1 és $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i un de valor propi 2 és $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una matriu fonamental i la seva inversa són: $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$, $X(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Busquem $\mathbf{u}(t)$ tal que $\mathbf{u}'(t) = X(t)^{-1}\mathbf{b}(t)$:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Resolent el sistema d'equacions tenim que $u_1(t) = 2t$, $u_2(t) = 3e^{-t}$.

La solució general és $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t)\mathbf{u}(t)$ sent $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures:

$$\mathbf{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 3 + 2t \end{pmatrix} e^t,$$

- (c) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Les arrels són complexes: $\lambda = 1 \pm i$. Un vector propi de valor propi $1 + i$ és $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una matriu fonamental i la seva inversa són:

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad X(t)^{-1} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Busquem $\mathbf{u}(t)$ tal que $\mathbf{u}'(t) = X(t)^{-1}\mathbf{b}(t)$:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

Resolent el sistema d'equacions tenim que $u_1(t) = t, u_2(t) = 0$.

La solució general és $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t)\mathbf{u}(t)$ sent $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures:

$$\mathbf{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} t e^t.$$

12. Resoleu el sistema lineal següent, amb terme no homogeni constant: $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solució: Busquem una solució particular constant (punt d'equilibri): $\mathbf{x}_p(t) \equiv \mathbf{v}$, la qual cosa ens porta al sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, i obtenim $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solució del sistema homogeni és $\mathbf{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures. Finalment, la solució general és $\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{v}$.

13. Trobeu la solució general de l'EDO de segon ordre $x'' + 2x' + x = t e^{-t}$.

Solució: Fem el canvi $y = x'$ i resulta el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t e^{-t} \end{pmatrix}$. El polinomi característic té l'arrel doble $\lambda = -1$, una base de Jordan és $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Una matriu fonamental i la seva inversa són: $X(t) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -t & -1 \end{pmatrix}$, $X(t)^{-1} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -t & -1-t \end{pmatrix}$.

Busquem $\mathbf{u}(t)$ tal que $\mathbf{u}'(t) = X(t)^{-1}\mathbf{b}(t)$:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -t & -1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t - t^2 \end{pmatrix}.$$

Resolent el sistema d'equacions tenim que $u_1(t) = t^2/2, u_2(t) = -t^2/2 - t^3/3$.

La solució general del sistema és $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t)\mathbf{u}(t)$ sent $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

Aleshores, la solució general de l'equació donada s'obté amb la primera coordenada:

$$x_g(t) = e^{-t}(c_1(1+t) + c_2 + \frac{t^3}{6}).$$

14. Calculeu la solució general real del sistema lineal homogeni $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, essent $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per a quins valors $L > 0$ el problema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(L) = 0$$

té solucions no trivial? [Obs.: Es tracta d'un problema de valors a la frontera (PVF) ja que les condicions sobre $x_1(0)$ i $x_2(L)$ s'imposen en punts diferents.]

Solució: La solució general és $\mathbf{x}_h(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1(\sin t - \cos t) - c_2(\sin t + \cos t) \end{pmatrix} e^t$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

Si imposem les condicions de frontera: $x_1(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$ i $x_2(L) = 0$ implica que $c_2 e^L (\sin L + \cos L) = 0$. Com que $c_2 \neq 0$ sinó seria la solució trivial, resulta $\sin L = -\cos L$ i, per tant, existeixen solucions no trivials si i només si $L = L_n = 3\pi/4 + n\pi$, per a $n \geq 0$.

15. Sigui $\mathbf{b} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funció contínua qualsevol. Proveu que el PVF següent té solució única:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad x_1(0) = x_2(L) = 0$$

(aquí, les funcions $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són les components del vector solució $\mathbf{x}(t)$). [Ind.: No cal que calculeu una solució particular.]

Solució: El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda - 7)(\lambda + 3)$. Un vector propi de valor propi 7 és $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i un de valor propi -3 és $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Una matriu fonamental és: $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & e^{-3t} \\ e^{7t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}$.

La solució general és $\mathbf{x}(t) = X(t)(\mathbf{c} + \mathbf{u}(t))$ sent $\mathbf{u}(t)$ una funció vectorial que dona lloc a una solució particular.

Imposant les condicions de frontera: el sistema $x_1(0) = x_2(L) = 0$ equival a:

$$\begin{aligned} 2c_1 + c_2 &= -2u_1(0) - u_2(0) \\ e^{7L}c_1 - 2e^{-3L}c_2 &= -e^{7L}u_1(L) - 2e^{-3L}u_2(L) \end{aligned}$$

Que té solució única (c_1, c_2) per a qualsevol valor dels termes independents perquè el determinant de la matriu del sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ e^{7L} & 2e^{-3L} \end{pmatrix}$ és diferent de zero.

16. Per a cadascun dels sistemes lineals del pla donats per les matrius següents,

$$\begin{aligned} (a) & \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, & (b) & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & (c) & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \\ (d) & \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, & (e) & \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, & (f) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

classifiqueu-lo i dibuixeu un croquis aproximat del seu retrat de fase, tot determinant-ne:

- si expandeix, contrau o preserva àrea;
- direccions d'entrada i/o sortida, si n'hi ha;
- direcció d'entrada (o sortida) més ràpida, si n'existeix més d'una;
- sentit de gir de les trajectòries, si és el cas;
- recta de punts d'equilibri, si n'hi ha.

Solució:

(a) El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$. Com que els valors propis són diferents i positius, el sistema és un *node propi repulsor*. Un vector propi de valor propi 4 és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_1]$ és la recta invariant de sortida ràpida. Un vector propi de valor propi 2 és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_2]$ és la recta invariant de sortida lenta. L'únic punt d'equilibri és l'origen. Expandeix àrees perquè la traça de la matriu del sistema és positiva ($\text{tr } A = 6$). La solució general és $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{2t} \mathbf{v}_2$.

Les trajectòries $\mathbf{x}(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$ tendeixen a posar-se "paral·leles" a $[\mathbf{v}_1]$ (ràpida) i quan $t \rightarrow -\infty$ tendeixen a l'origen asimptòticament a $[\mathbf{v}_2]$.

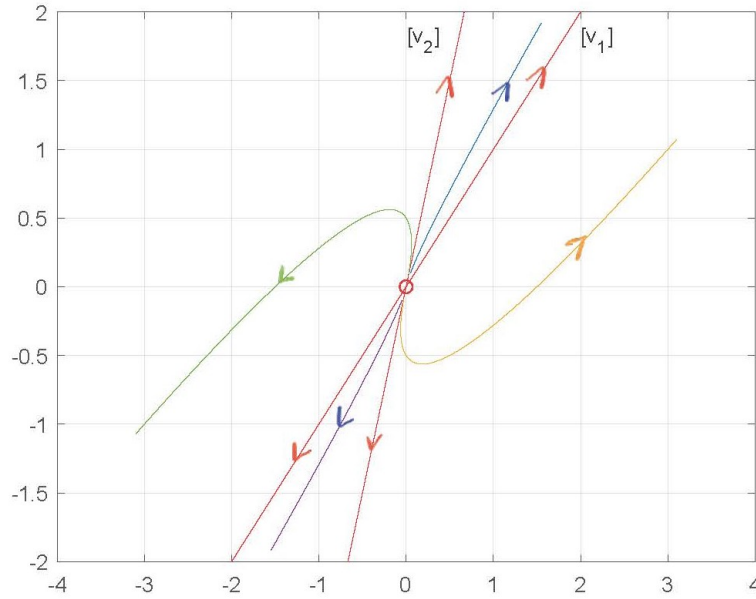


Figura 3: Croquis del retrat de fase 16(a)

- (b) El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Com que els valors propis tenen signe diferent, el sistema és una *sella*. Un vector propi de valor propi -1 és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_1]$ és la recta invariant d'entrada. Un vector propi de valor propi 2 és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_2]$ és la recta invariant de sortida. L'únic punt d'equilibri és l'origen. Expandeix àrees perquè la traça de la matriu del sistema és positiva ($\text{tr } A = 1$). La solució general és $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{2t} \mathbf{v}_2$. Les rectes invariants són asímptotes de les trajectòries $\mathbf{x}(t)$.

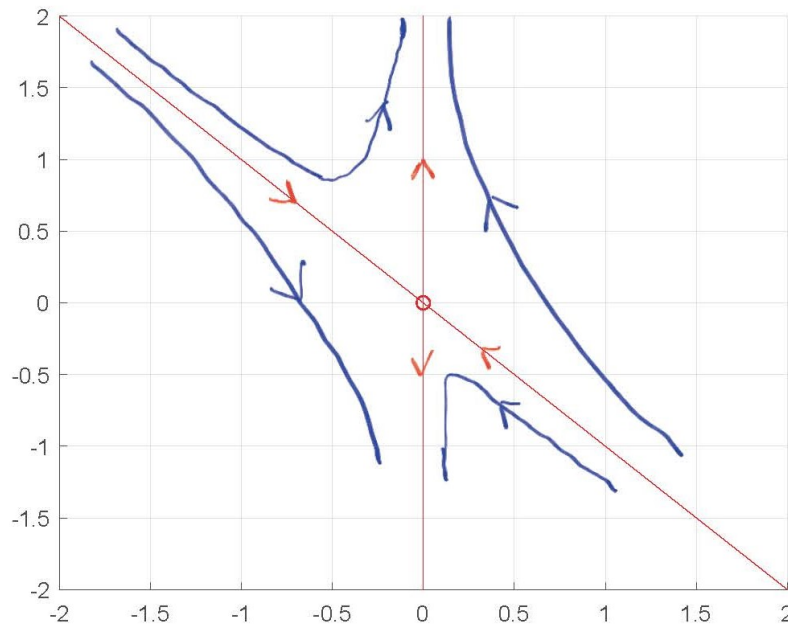


Figura 4: Croquis del retrat de fase 16(b)

- (c) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. Els valors propis són complexos: $1 \pm 2i$.

Com que la part real és positiva, el sistema és un *focus repulsor*. Un vector propi de valor propi $1 + 2i$ és $\mathbf{u} + i\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'únic punt d'equilibri és l'origen. Expandeix àrees perquè la traça de la matriu del sistema és positiva ($\text{tr } A = 2$). La solució general és $\mathbf{x}(t) = e^t(c_1(\cos 2t \mathbf{u} - \sin 2t \mathbf{w}) + c_2(\sin 2t \mathbf{u} + \cos 2t \mathbf{w}))$.

El sentit de gir és antihorari perquè el vector tangent en un punt a la dreta del centre, per exemple en el punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i té la segona component positiva.

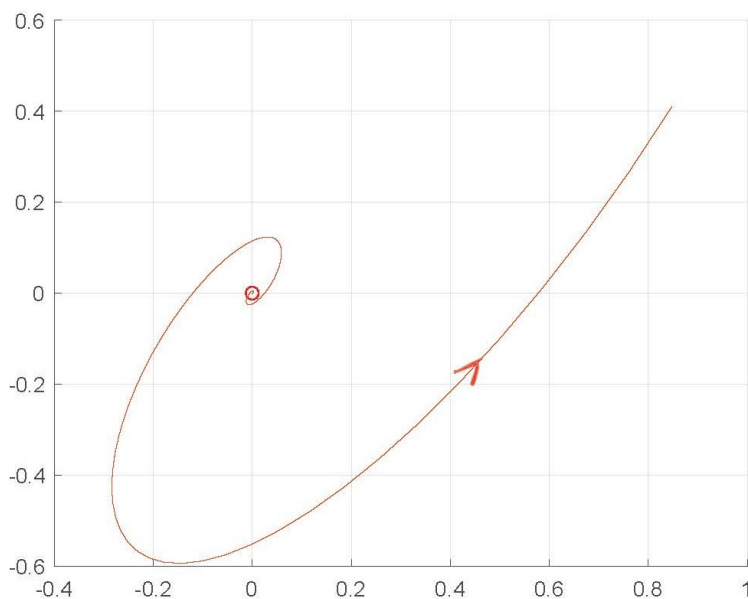


Figura 5: Croquis del retrat de fase 16(c)

- (d) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Els valors propis són complexos: $\lambda = \pm i$. Com que la part real és nul·la, el sistema és un *centre* i totes les trajectòries són periòdiques de període $T = \frac{2\pi}{|\text{Im } \lambda|} = 2\pi$. Un vector propi de valor propi i és $\mathbf{u} + i\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'únic punt d'equilibri és l'origen. Conserva àrees perquè la traça de la matriu del sistema és nul·la. La solució general és $\mathbf{x}(t) = c_1(\cos t \mathbf{u} - \sin t \mathbf{w}) + c_2(\sin t \mathbf{u} + \cos t \mathbf{w})$.

El sentit de gir és antihorari perquè el vector tangent en un punt a la dreta del centre, per exemple en el punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i té la segona component positiva.

- (e) El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda + 3)^2$. El valor propi és doble i negatiu, per tant, el sistema és un *node impropri atractor*. Una base de Jordan és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = (A + 3I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, la recta $[\mathbf{v}_2]$ és la única recta invariant i és d'entrada. L'únic punt d'equilibri és l'origen. Comprimeix àrees perquè la traça de la matriu del sistema és negativa ($\text{tr } A = -6$). La solució general és $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = e^{-3t}c_1\mathbf{v}_1 + (c_1t + c_2)\mathbf{v}_2$.

Les trajectòries $\mathbf{x}(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$ tendeixen a l'origen asimptòticament a la recta invariant $[\mathbf{v}_2]$ i quan $t \rightarrow -\infty$ tendeixen a posar-se "paral·leles" a $[\mathbf{v}_2]$.

Observació: Per veure que les òrbites són aquestes i no les simètriques respecte de la recta invariant n'hi ha prou en calcular el vector tangent en un punt a la dreta de l'origen, per exemple

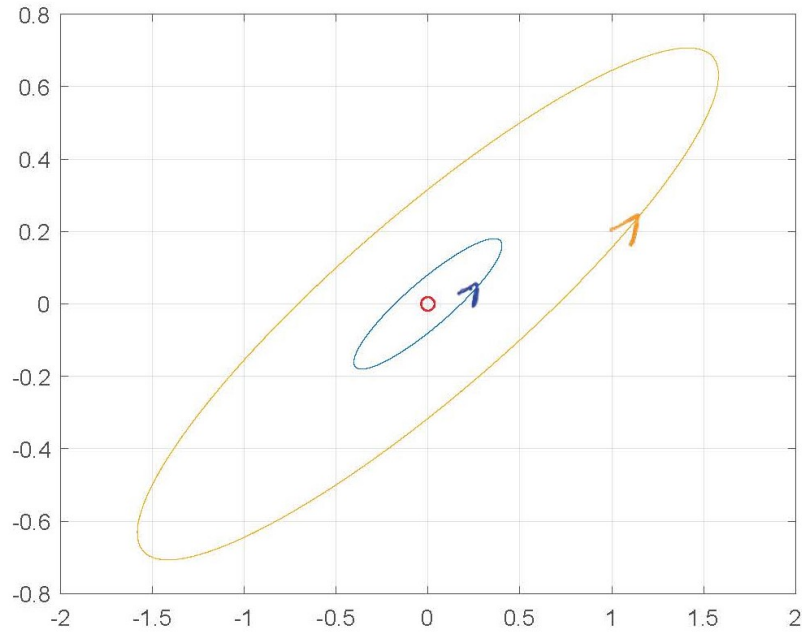


Figura 6: Croquis del retrat de fase 16(d)

en el punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i té la segona component positiva.

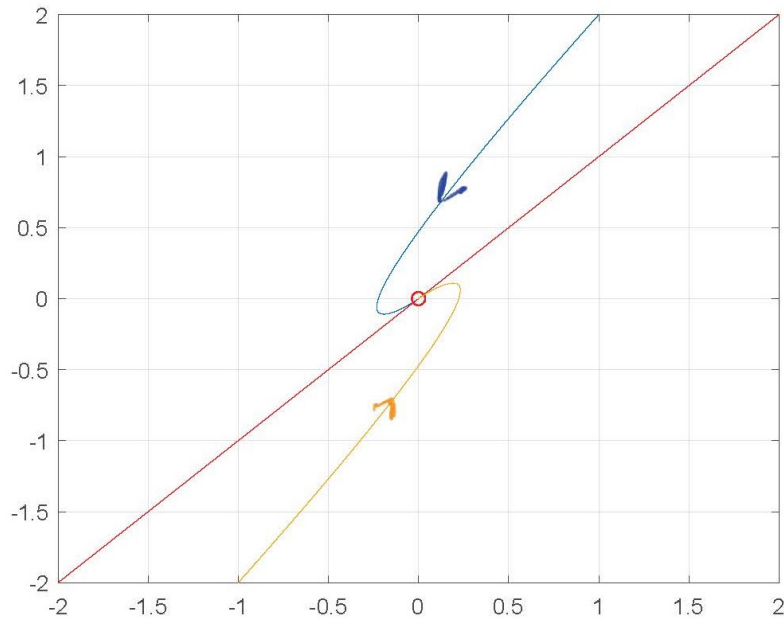


Figura 7: Croquis del retrat de fase 16(e)

- (f) El polinomi característic és $Q(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda$. Com que un valor propi és 0 i l'altre positiu, el sistema és un *degenerat inestable*. Un vector propi de valor propi 1 és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_1]$

és la recta invariant de sortida. Un vector propi de valor propi 0 és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_2]$ és la recta de punts d'equilibri. Expandeix àrees perquè la traça de la matriu del sistema és positiva ($\text{tr } A = 1$). La solució general és $\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$.

Totes les trajectòries $\mathbf{x}(t)$ son semirectes obertes amb origen la recta de punts d'equilibri $[\mathbf{v}_2]$ i paral·leles a la recta invariant $[\mathbf{v}_1]$.

Observació general: En tots els casos (c_1, c_2) son les coordenades del punt inicial $\mathbf{x}(0)$ en la base de Jordan $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

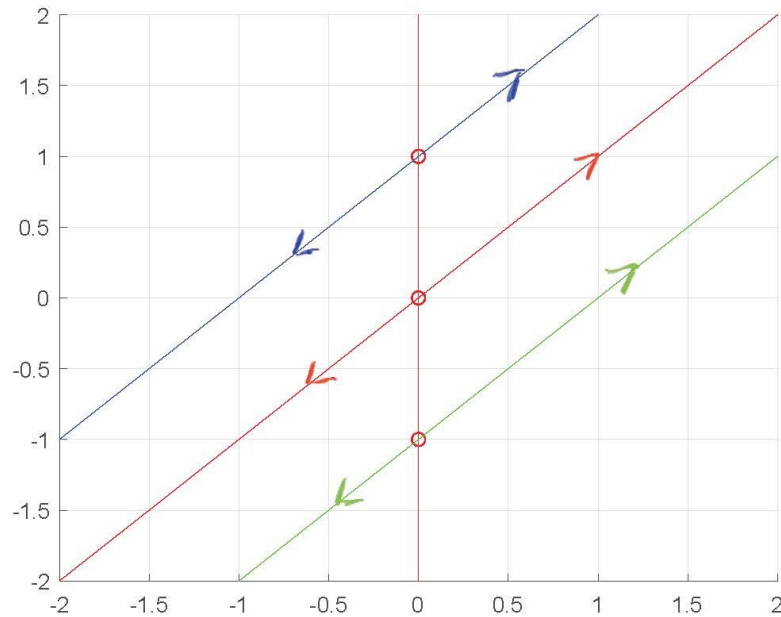


Figura 8: Croquis del retrat de fase 16(f)

17. Reescribint l'EDO lineal de segon ordre $x'' + 2x' + x = 0$ com un sistema lineal 2D, classifiqueu aquest sistema i dibuixeu-ne un croquis aproximat del seu retrat de fase. Interpreteu les seves òrbites en termes de les solucions de l'EDO original.

Solució: Fem el canvi $y = x'$ i resulta el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

És la part homogènia del problema 13 i la solució general és: $\mathbf{x}(t) = e^{-t}(c_1 \mathbf{v}_1 + (c_1 t + c_2) \mathbf{v}_2)$ sent $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

El valor propi és doble i negatiu, per tant, el sistema és un *node impropri atractor*. La recta $[\mathbf{v}_2]$ és la única recta invariant i és d'entrada. L'únic punt d'equilibri és l'origen.

Les trajectòries $\mathbf{x}(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$ tendeixen a l'origen asimptòticament a la recta invariant $[\mathbf{v}_2]$ i quan $t \rightarrow -\infty$ tendeixen a posar-se "paral·leles" a $[\mathbf{v}_2]$.

Observació: Per veure que les òrbites son aquestes i no les simètriques respecte de la recta invariant n'hi ha prou en calcular el vector tangent en un punt a la dreta de l'origen, per exemple en el punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i té la segona component negativa.

Per a cada valor de t , l'abscissa és el valor de $x(t)$ i l'ordenada és la seva velocitat $x'(t)$.

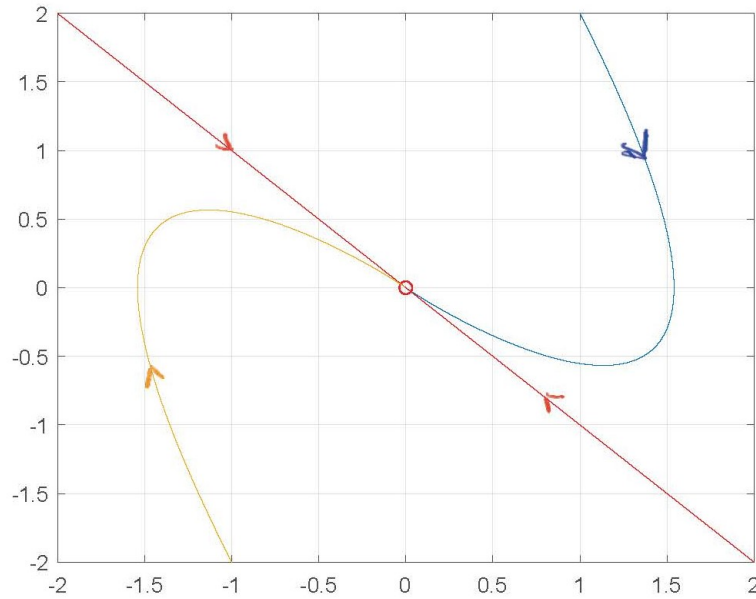


Figura 9: Algunes trajectòries del problema 17

18. Si A és una matriu real 2×2 amb valors propis complexos conjugats, doneu una condició suficient perquè el sentit de gir de les trajectòries del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sigui horari. En el cas que el sistema vingui associat a una EDO lineal de segon ordre, quin és el sentit de gir?

Solució: Escrivint $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, per veure el sentit de gir n'hi ha prou en calcular el vector tangent en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; aquest vector és $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ o en $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ respectivament. Si $c > 0$ el sentit és antihorari i si $c < 0$ és horari. Si $c = 0$, com que $b \neq 0$ perquè A no és diagonal, resulta que si $b > 0$ és horari i si $b < 0$ és antihorari.

19. Sigui A una matriu real 2×2 amb un valor propi doble no nul. Doneu una condició necessària i suficient perquè el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sigui un node impropri.

Solució: Que no sigui diagonalitzable i que el valor propi no sigui 0.

20. Si $\mathbf{x}(t)$ és la solució del PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, determineu en cadascun dels casos següents els valors del paràmetre per als quals la solució $\mathbf{x}(t)$ tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$:

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2 & 2\mu \\ 2\mu & \mu^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) \ A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \ A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Solució:

- (a) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - (1 + \mu^2)$. Com que els valors propis $\pm(1 + \mu^2)$ tenen signe diferent, el sistema és una *sella* i l'única opció perquè la trajectòria tendeixi a $(0, 0)$ és que el punt $\mathbf{x}_0$ estigui en la recta invariant d'entrada:

$$(A + (1 + \mu^2)I)\mathbf{x}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2\mu \\ 2\mu & 2\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu = -2$$

Un procediment alternatiu, que ens evita calcular explícitament els valors propis (sobretot quan la seva expressió en funció del paràmetre és complicada) és imposar directament que $\mathbf{x}_0$ sigui vector propi de valor propi negatiu, és a dir, que els vectors $A\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x}_0$ siguin proporcionals amb un factor de proporcionalitat negatiu. Calculant

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 - 2\mu^2 + 2\mu \\ 4\mu + \mu^2 - 1 \end{pmatrix},$$

veiem que és proporcional a $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $2 - 2\mu^2 + 2\mu = 2(4\mu + \mu^2 - 1)$. Resolent aquesta equació obtenim els valors $\mu_1 = 1/2$ i $\mu_2 = -2$, que són els únics casos en què $\mathbf{x}_0$ és vector propi. El valor propi associat és el factor de proporcionalitat: $\lambda_1 = 4\mu_1 + \mu_1^2 - 1 = 5/4$ i $\lambda_2 = 4\mu_2 + \mu_2^2 - 1 = -5$ respectivament. Descartem el primer cas ja que el valor propi és positiu (el punt $\mathbf{x}_0$ es trobaria sobre la recta invariant de sortida). i per tant l'únic cas en què $\mathbf{x}_0$ es troba sobre la recta invariant d'entrada és $\mu = -2$.

- (b) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - (1 + \mu^2)$. Com que els valors propis $\pm\sqrt{1 + \mu^2}$ tenen signe diferent, el sistema és una *sella* i l'única opció perquè la trajectòria tendeixi a $(0, 0)$ és que el punt $\mathbf{x}_0$ estigui en la recta invariant d'entrada:

$$(A + \sqrt{1 + \mu^2}I)\mathbf{x}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 + \mu^2} & \mu \\ \mu & -1 + \sqrt{1 + \mu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

i aquest sistema és incompatible perquè restant les dues equacions que surten dona $2 = 0$. Per tant, la resposta és mai.

Com hem vist a l'apartat (a), també podem imposar directament que $\mathbf{x}_0$ sigui vector propi de valor propi negatiu: calculant $A\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 + \mu \\ \mu - 1 \end{pmatrix}$, veiem que només pot ser proporcional al vector $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $1 + \mu = \mu - 1$, cosa impossible.

- (c) El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - (1 + \mu^2)$. Com que els valors propis $\pm\sqrt{1 + \mu^2}$ tenen signe diferent, el sistema és una *sella* i l'única opció perquè la trajectòria tendeixi a $(0, 0)$ és que el punt $\mathbf{x}_0$ estigui en la recta invariant d'entrada:

$$(A + \sqrt{1 + \mu^2}I)\mathbf{x}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu + \sqrt{1 + \mu^2} & 1 \\ 1 & -\mu + \sqrt{1 + \mu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

és a dir, $\beta = -(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})\alpha$.

21. Determineu el diagrama de bifurcacions corresponent a l'estabilitat i classificació del sistema lineal associat a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \mu & \mu - 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Quines bifurcacions comporten un canvi d'estabilitat?

Solució: Primer, calculem els zeros dels tres valors que classifiquen: el determinant $D = \mu^2 - \mu + 1$ (en aquest cas, sempre és positiu), la traça $T = 2\mu$ i el discriminant $\Delta = 4\mu - 4$; segon, fem un esquema segons els signes d'aquests valors:

$\mu < 0$	$\mu = 0$	$0 < \mu < 1$	$\mu = 1$	$\mu > 1$
$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$
$T < 0$	$T = 0$	$T > 0$	$T > 0$	$T > 0$
$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Focus atractor Estable	Centre Estable no atractor	Focus repulsor Inestable	Node impropri repulsor Inestable	Node repulsor Inestable

22. Determineu el diagrama de bifurcacions corresponent a la estabilitat i classificació del sistema lineal associat a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 - 3\mu^2 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Quines bifurcacions comporten un canvi d'estabilitat?

Solució: Primer, calculem els zeros dels tres valors que classifiquen: el determinant $D = 4 - 3\mu^2$, la traça $T = 2\mu$ i el discriminant $\Delta = 16\mu^2 - 16$; segon, fem un esquema segons els signes d'aquests valors.

$\mu < -\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\mu = -\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} < \mu < -1$	$\mu = -1$	$-1 < \mu < 0$	$\mu = 0$	$0 < \mu < 1$	
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	
$T < 0$	$T < 0$	$T < 0$	$T < 0$	$T < 0$	$T = 0$	$T > 0$	
$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	
Sella Inestable no repulsor	Degenerat Estable no atractor	Node atractor (Estable)	Node impropi atractor (Estable)	Focus atractor (Estable)	Centre Estable no atractor	Focus repulsor (Inestable)	(...)

	$\mu = 1$	$1 < \mu < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\mu > \frac{2}{\sqrt{3}}$
	$D > 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
	$T > 0$	$T > 0$	$T > 0$	$T > 0$
	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$
(...)	Node impropi repulsor (Inestable)	Node repulsor (Inestable)	Degenerat Inestable no repulsor	Sella Inestable no repulsor

23. Calculeu la solució general i dibuixeu un croquis detallat del següent sistema lineal 3D:

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + z, \\ y' &= -y + 4z, \\ z' &= z. \end{cases}$$

Solució: Els valors propis són reals: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 1$. El sistema és inestable però no repulsor, ja que $\lambda_3 > 0$ però $\lambda_{1,2} < 0$. A més, contrau volum ja que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 < 0$. Els vectors propis són $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ i $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1)$. Per tant, la solució general del sistema és

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^t \\ y(t) &= c_2 e^{-t} + 2c_3 e^t \\ z(t) &= c_3 e^t \end{aligned} \right\},$$

on els coeficients $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ són lliures. Sigui $r_j = [\mathbf{v}_j]$ la recta que passa per l'origen amb direcció $\mathbf{v}_j$. Com que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, sabem que r_1 és la recta d'entrada ràpida, r_2 és la recta d'entrada lenta i r_3 és la recta de sortida. El pla horitzontal $\Pi = \{z = 0\}$ conté les dues rectes d'entrada, és per tant un pla invariant d'entrada i el sistema 2D sobre Π és un node propi atractor, ja que té dues rectes d'entrada de valors propis diferents. Les trajectòries sobre Π no contingudes en les rectes d'entrada tendeixen a l'origen tangencialment a la recta d'entrada lenta r_2 . Existeixen uns altres dos plans invariants: els determinats per la recta de sortida r_3 i qualsevol de les rectes d'entrada. Sobre aquests plans el sistema inicial és una sella, ja que té una direcció d'entrada i una altra de sortida.

25. Considerem un sistema lineal al pla, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, on la matriu A depèn d'un paràmetre:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculeu la seva estabilitat i classifiqueu-lo en funció de μ .

- (b) Dibuixeu un croquis de les seves trajectòries en el pla $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ per a cadascun dels següents valors del paràmetre: $\mu = 0$, $\mu = 1$ i $\mu = 2$.
- En un dels tres casos anteriors hi ha una recta d'entrada i una altra de sortida. En aquest cas, és possible que una trajectòria que comença al primer quadrant arribi al tercer quadrant? Per què?
 - En un altre cas totes les trajectòries són periòdiques. De quin període?
 - En un altre cas el sistema és degenerat. És inestable? Per què?

Solució:

- (a) Primer calculem els zeros dels valors que classifiquen: el determinant $D = 1 - \mu^2$, la traça $T = 0$ i, en aquest cas, no necessitem el discriminant; segon, fem un esquema segons els signes d'aquests valors.

$\mu < -1$	$\mu = -1$	$-1 < \mu < 1$	$\mu = 1$	$\mu > 1$
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Sella Inestable no repulsor	Degenerat Inestable no repulsor	Centre Estable no atractor	Degenerat Inestable no repulsor	Sella Inestable no repulsor

- (b)
- $\mu = 0$. El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Els valors propis són complexos: $\lambda = \pm i$. Ja hem vist que el sistema és un *centre* i totes les trajectòries són periòdiques de període $T = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im} \lambda|} = 2\pi$. Un vector propi de valor propi i és $\mathbf{u} + i\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solució general és $\mathbf{x}(t) = c_1(\cos t \mathbf{u} - \sin t \mathbf{w}) + c_2(\sin t \mathbf{u} + \cos t \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}$. El sentit de gir és horari perquè el vector tangent en un punt a la dreta del centre, per exemple en el punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i té la segona component negativa. Com que els dos vectors de la base són ortogonals i de la mateixa longitud, les trajectòries són circumferències centrades a l'origen i recorregudes en sentit horari.
 - $\mu = 1$. El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2$. El valor propi és 0 i doble. Ja sabem que el sistema és *degenerat inestable*. Una base de Jordan és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la recta $[\mathbf{v}_2]$ és una recta de punts d'equilibri. La solució general és $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = c_1\mathbf{v}_1 + (c_1t + c_2)\mathbf{v}_2$. Les òrbites no trivials $\mathbf{x}(t)$ són rectes paral·leles a $[\mathbf{v}_2]$ recorregudes en el sentit de $\mathbf{v}_2$ si la coordenada c_1 és positiva i en el contrari si és negativa. (Recordeu que $\mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, per tant, (c_1, c_2) són les coordenades de $\mathbf{x}(0)$ en la base de Jordan $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$). El sistema és inestable perquè les trajectòries no estan acotades quan $t \rightarrow +\infty$.
 - $\mu = 2$. El polinomi característic és $Q(\lambda) = \lambda^2 - 3$. Ja sabem que el sistema és una *sella*. Un vector propi de valor propi $\sqrt{3}$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_1]$ és la recta invariant de sortida. Un vector propi de valor propi $-\sqrt{3}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_2]$ és la recta invariant d'entrada. La solució general és $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\sqrt{3}t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-\sqrt{3}t} \mathbf{v}_2$. Les rectes invariants són asímptotes de les trajectòries $\mathbf{x}(t)$. Les trajectòries que comencen al primer quadrant no poden passar pel tercer com es veu en el croquis.

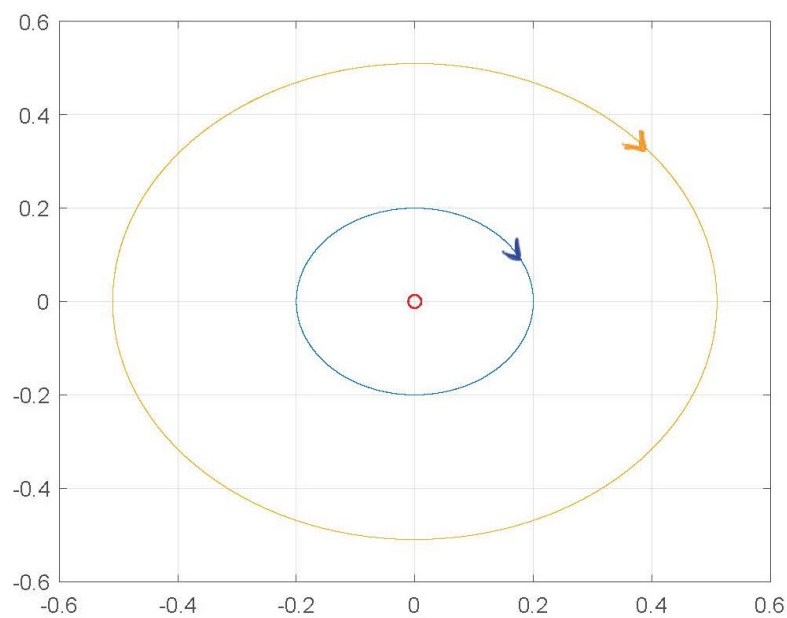


Figura 10: Croquis del retrat de fase 25($\mu = 0$)

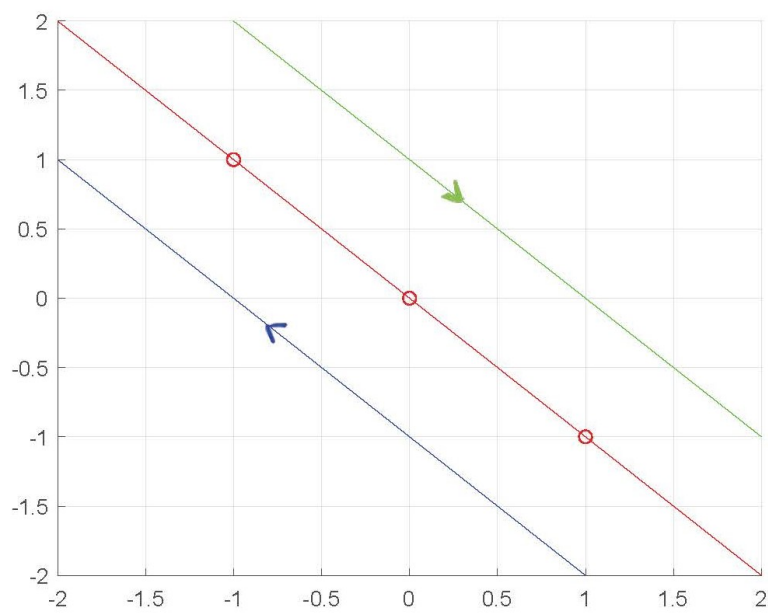


Figura 11: Croquis del retrat de fase 25($\mu = 1$)

26. Donada l'EDO lineal de segon ordre $x'' = -ax - bx'$, estudieu la seva estabilitat i classifiqueu-la en funció dels paràmetres, que suposem $a > 0$ i $b \geq 0$ (oscil·lacions lineals).

Solució: Fem el canvi $y = x'$ i resulta el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$D = a, \quad T = -b, \quad \Delta = b^2 - 4a.$$

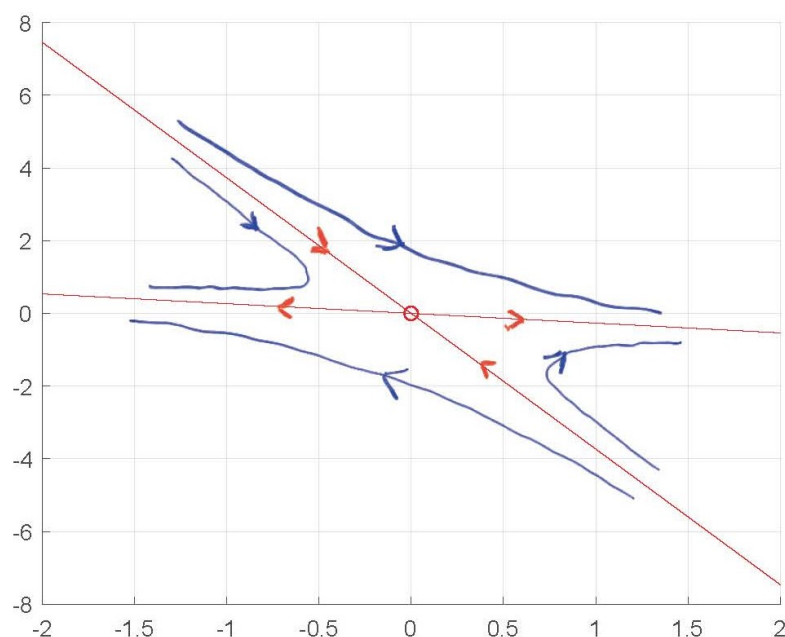


Figura 12: Croquis del retrat de fase 25($\mu = 2$)

- $a < 0$. Sella. Inestable no repulsor.
- $a = 0$
 - $b < 0$. Degenerat inestable no repulsor. Recta de punts d'equilibri i trajectòries no trivials que son semirectes amb origen un punt d'equilibri.
 - $b = 0$. Degenerat inestable no repulsor. Recta de punts d'equilibri i trajectòries no trivials que son rectes paral·leles a la recta de punts d'equilibri.
 - $b > 0$. Degenerat estable no atractor. Recta de punts d'equilibri i trajectòries no trivials que son semirectes amb final en un punt d'equilibri.
- $a > 0$.
 - $b < -2\sqrt{a}$. Node propi repulsor.
 - $b = -2\sqrt{a}$. Node impropri repulsor.
 - $-2\sqrt{a} < b < 0$. Focus repulsor.
 - $b = 0$. Centre (estable no atractor).
 - $0 < b < 2\sqrt{a}$. Focus atractor.
 - $b = 2\sqrt{a}$. Node impropri atractor.
 - $b > 2\sqrt{a}$. Node propi atractor.

Sistemes d'EDOs no lineals

27. Calculeu els punts d'equilibri dels sistemes no lineals següents,

$$(a) \begin{cases} x' = xy + 12, \\ y' = x^2 + y^2 - 25; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = y - x^2, \\ y' = x + y - 2. \end{cases}$$

Per a cada sistema, estudieu pel mètode de linealització l'estabilitat dels seus punts d'equilibri. A quines zones del pla (x, y) s'expandeixen o es contrauen àrees?

Solució: (a) El sistema $\begin{cases} 0 = xy + 12, \\ 0 = x^2 + y^2 - 25, \end{cases}$ restant i sumant la primera equació a la segona és equivalent a $\begin{cases} (x + y)^2 = 1, \\ (x - y)^2 = 49, \end{cases}$.

Els punts d'equilibri (solucions del sistema) són $(4, -3), (-3, 4), (3, -4), (-4, 3)$.

La matriu del sistema linealitzat en un punt d'equilibri (x_0, y_0) és

$$A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial x'}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial y'}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial y'}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix}.$$

Els punts $(\pm 4, \mp 3)$ són inestables (perquè el sistema linealitzat és una sella), el punt $(3, -4)$ és atractor (perquè el linealitzat és un node atractor) i el punt $(-3, 4)$ és repulsor (perquè el linealitzat és un node repulsor). D'altra banda, la divergència del camp vectorial és $\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = 3y$, i per tant les àrees s'expandeixen al semiplà superior ($y > 0$) i es contrauen al semiplà inferior ($y < 0$).

(b) $\begin{cases} 0 = y - x^2, \\ 0 = x + y - 2. \end{cases}$ és equivalent a $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ y = x^2, \end{cases}$.

Els punts d'equilibri (solucions del sistema) són $(1, 1), (-2, 4)$.

La matriu del sistema linealitzat en un punt d'equilibri (x_0, y_0) és

$$A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial x'}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial y'}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial y'}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Els punt $(1, 1)$ és inestable (perquè el sistema linealitzat és una sella), el punt $(-2, 4)$ és repulsor (perquè el linealitzat és un node repulsor).

D'altra banda, la divergència del camp vectorial és $\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = -2x + 1$, i per tant les àrees s'expandeixen al semiplà $x < 1/2$ i es contrauen al semiplà $x > 1/2$.

28. Apliqueu el mètode de Lyapunov, usant la funció $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, per estudiar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri dels sistemes següents:

$$\begin{aligned} (a) \quad \begin{cases} x' = y - 3x^3, \\ y' = -x - 7y^3; \end{cases} & \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -x + (x + y)^2 x, \\ y' = -y^3 + (x + y)^2 y^3; \end{cases} \\ (c) \quad \begin{cases} x' = -x^3 + 4xy^2, \\ y' = -4y^3; \end{cases} & \quad (d) \quad \begin{cases} x' = 2x^3 - 2y^3, \\ y' = 2xy^2 + 4x^2 y + 2y^3. \end{cases} \end{aligned}$$

En algun cas es pot determinar l'estabilitat de l'origen pel mètode de linealització?

Solució: La derivada temporal de $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ és $W(x, y) = xx' + yy'$. Fent operacions, obtenim:

- (a) Atractor, ja que $W(x, y) = -3x^4 - 7y^4$ és definida negativa a l'origen (màxim local estricte).
- (b) Atractor, ja que $W(x, y) = ((x + y)^2 - 1)(x^2 + y^4)$ és definida negativa a l'origen (mínim local estricte) perquè a prop de l'origen el primer factor sempre és negatiu i el segon positiu.
- (c) Atractor, ja que $W(x, y) = -(x^2 - 2y^2)^2$ és semi-definida negativa (màxim local no estricte) a l'origen perquè s'anul·la quan $x^2 = 2y^2$ i, a més, el camp de vectors és transversal al conjunt

$x^2 = 2y^2$ ($W(x, y) = 0$) perquè si una trajectòria compleix aquesta igualtat, derivant, tenim que $xx' = 2yy'$ i, substituïnt x', y' pel seu valor, resulta $y = 0, x = 0$ i l'única trajectòria continguda al conjunt $W(x, y) = 0$ és la trivial.

(d) Repulsor, ja que $W(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2$ és definida positiva a l'origen.

La linealització no decideix l'estabilitat en cap d'aquests casos: en (a) el sistema linealitzat és un centre, i en (b,c,d) obtenim sistemes linealitzats degenerats sense valors propis positius. Justament són els dos casos en que el linealitzat d'un sistema 2D no decideix l'estabilitat. De fet, la matriu del sistema linealitzat per a (c,d) és la matriu zero.

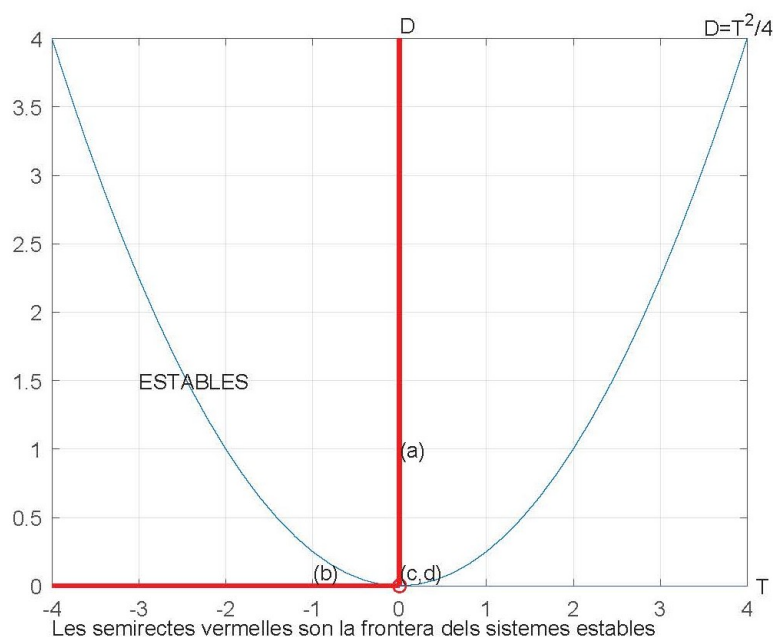


Figura 13: Diagrama bifurcacions problema 28

29. Estudieu l'estabilitat de l'origen per al sistema

$$\begin{cases} x' &= xy^2 + \mu x^3, \\ y' &= -2x^2y + \mu y^3. \end{cases}$$

[Ind.: Useu una funció del tipus $V(x, y) = ax^2 + by^2$.]

Solució: Derivant, $W(x, y) = 2axx' + 2byy' = (2a - 4b)x^2y^2 + 2\mu(ax^4 + by^4)$. Si prenem $a = 2$ i $b = 1$, ens queda $W(x, y) = 2\mu(ax^4 + by^4)$. Deduïm: si $\mu > 0$, $W(x, y)$ és definida positiva i l'origen és repulsor; si $\mu < 0$, $W(x, y)$ és definida negativa i l'origen és atractor; i si $\mu = 0$, $W(x, y) \equiv 0$ i l'origen és estable però no atractor, ja que $V(x, y)$ és una integral primera del sistema ($V(x, y)$ és una quantitat conservada). No és possible aplicar el mètode de linealització, ja que la matriu del sistema linealitzat és nul·la.

30. Considerem l'EDO no lineal de segon ordre $x'' = -a \sin x - bx'$, on $a > 0$ i $b \geq 0$ són paràmetres (correspon a l'equació del pèndol, vegeu el problema 39). Estudieu l'estabilitat dels seus punts d'equilibri aplicant el mètode de linealització (podeu usar el resultat del problema 26) i, quan sigui necessari, el mètode de Lyapunov usant la funció $V(x, y) = y^2/2 + a(1 - \cos x)$.

Solució: El cas $b = 0$ és el cas del pèndol sense fricció i està estudiat en els apunts de teoria de l'assignatura (pag 36). El cas $b > 0$ és el cas del pèndol amb fricció (problema 39).

31. L'origen és un punt d'equilibri del sistema no lineal

$$\begin{cases} x' &= y + \alpha x^3, \\ y' &= -x/4 + \mu y + 2\alpha y^5. \end{cases}$$

- (a) Calculeu i classifiqueu el sistema linealitzat a l'origen en funció dels paràmetres.
 (b) Estudieu, quan $\mu \neq 0$, l'estabilitat del sistema no lineal pel mètode de linealització.
 (c) Estudieu, suposant $\mu = 0$, l'estabilitat del sistema no lineal pel mètode de Lyapunov usant una funció de la forma $V(x, y) = ax^2 + by^2$.

Solució:

- (a) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & \mu \end{pmatrix}$. Com que $T = \text{tr } A = \mu$, $D = \det A = 1/4$ i $\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 1$, obtenim el diagrama de bifurcació que podem veure a la figura. Els valors $\mu = \pm 1$ corresponen a nodes impropis. El color blau/verd/vermell denota un sistema linealitzat atractiu/estable/repulsor.

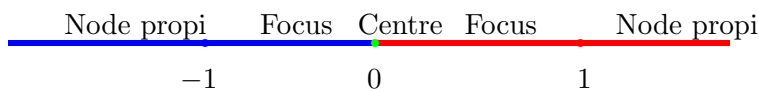


Figura 14: Diagrama de bifurcació del sistema linealitzat del problema 31 per a $\mu \in \mathbb{R}$.

- (b) En aquest sistema no lineal, l'origen és atractiu/repulsor quan el paràmetre μ és negatiu/positiu, independentment del valor de α . La linealització no decideix l'estabilitat quan $\mu = 0$.
 (c) La derivada temporal de la funció $V(x, y)$ és $W(x, y) = (2a - b/2)xy + 2\alpha(ax^4 + by^6)$, ja que estem suposant $\mu = 0$. Si prenem $a = 1$ i $b = 4$, ens queda $W(x, y) = 2\alpha(x^4 + 4y^6)$, i per tant: si $\alpha > 0$, $W(x, y)$ és definida positiva i l'origen és repulsor; si $\alpha < 0$, $W(x, y)$ és definida negativa i l'origen és atractiu; i si $\alpha = 0$, $W(x, y) \equiv 0$ i l'origen és un centre (de fet, un centre lineal), estable però no atractiu.

32. Considerem la següent EDO no lineal de segon ordre,

$$x'' + (\mu + 3x^2)x' + x = 0, \quad \mu \geq 0.$$

- (a) Proveu que si definim $y = x' + \mu x + x^3$, aleshores l'equació es pot reescriure com el següent sistema 2D,

$$\begin{cases} x' &= y - \mu x - x^3, \\ y' &= -x. \end{cases}$$

- (b) Determineu, quan sigui possible, l'estabilitat de l'origen pel mètode de linealització.
 (c) Usant la funció $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, estudieu l'estabilitat de l'origen pel mètode de Lyapunov per a $\mu = 0$.
 (d) Què es pot deduir sobre l'equació original?

Solució:

- (a) La primera equació del sistema s'obté aïllant x' de la definició de y . La segona equació és $y' = x'' + (\mu + 3x^2)x' = -x$.

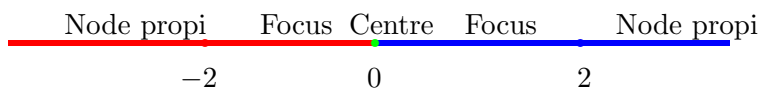


Figura 15: Diagrama de bifurcació del sistema linealitzat del problema 32 per a $\mu \in \mathbb{R}$.

- (b) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és $A = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Com que $T = \text{tr } A = -\mu$, $D = \det A = 1$ i $\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 4$, obtenim el diagrama de bifurcació que podem veure a la figura. Els valors $\mu = \pm 2$ corresponen a nodes impropis. El color blau/verd/vermell denota un sistema linealitzat atractiu/estable/repulsor. Per tant, l'origen és un punt d'equilibri repulsor/attractor quan el paràmetre μ és negatiu/positiu. La linealització no decideix l'estabilitat quan $\mu = 0$.
- (c) Derivant, $W(x, y) = -\mu x^2 - x^4 = -x^4$, ja que $\mu = 0$. Per tant, $W(x, y)$ és semidefinida negativa i l'origen és estable. De fet, podem afirmar que l'origen és atractiu, ja que el camp de vectors és transversal a la recta $\{y = 0\}$ on s'anul·la $W(x, y)$ (no hi ha cap trajectòria no trivial amb $x = 0$ perquè derivant surt $x' = 0$ i com que $x' = y - x^3 = y$ resulta que l'única trajectòria continguda a $W(x, y) = 0$ és la trivial).
- (d) Si $\mu \geq 0$, aleshores l'origen del sistema 2D és atractiu i $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$ per a tota trajectòria que comenci suficientment a prop de l'origen. Així tenim $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ i podem dir que l'origen és atractiu també per a l'equació original. Un raonament anàleg s'aplica en el cas $\mu < 0$.

33. Considerem el sistema de Lorenz (vegeu [Wikipedia](#) i [YouTube](#)):

$$\begin{cases} x_1' &= \sigma(x_2 - x_1), \\ x_2' &= x_1(\rho - x_3) - x_2, \\ x_3' &= x_1x_2 - \beta x_3, \end{cases}$$

on $\sigma, \rho, \beta > 0$ són paràmetres. Per simplificar, suposarem que $\rho > 1$.

- (a) Calculeu els seus tres punts d'equilibri.
- (b) Estudieu l'estabilitat de l'origen per al sistema de Lorenz.
- (c) Quin aspecte tenen les seves trajectòries prop de l'origen?
- (d) Aquest sistema, expandeix o contrau volums?

Solució:

- (a) Els tres punts crítics són l'origen i $(\pm a, \pm a, b)$, amb $a = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ i $b = \rho - 1$.
- (b) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

que té els valors propis següents:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Com que $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, l'origen és inestable però no repulsor.

- (c) L'origen és una sella, amb una dimensió inestable (de sortida) i dues dimensions estables (d'entrada). El eix vertical és una recta invariant d'entrada. Les trajectòries prop de l'origen no giren, ja que tots els valors propis són reals.
- (d) La divergència del camp vectorial és sempre negativa, i per tant contrau volums.

34. Considerem el sistema de Rössler (vegeu [Wikipedia](#) i [YouTube](#)):

$$\begin{cases} x'_1 &= -x_2 - x_3, \\ x'_2 &= x_1 + ax_2, \\ x'_3 &= (x_1 - b)x_3 + c, \end{cases}$$

on a , b i c són paràmetres.

- (a) Calculeu els punts d'equilibri del sistema quan $a \neq 0$.
- (b) Calculeu l'únic punt d'equilibri del sistema quan $a = c = 0$ i $b \neq 0$. Estudieu, per als valors de $b \neq 0$ en que sigui possible, la seva estabilitat pel mètode de linealització.
- (c) Calculeu els punts d'equilibri del sistema quan $a = b = c = 0$. Estudieu l'estabilitat pel mètode de linealització en tots els punts d'equilibri on sigui possible.
- (d) Suposem que $a > 0$ i $b = c$. Si una trajectòria parteix d'un punt del pla $x_1 = b$ tal que $x_2 \neq 0$, inicialment s'apropa o s'allunya de l'origen?

Solució:

- (a) Els punts d'equilibri compleixen $x_1 = -ax_2$, $x_3 = -x_2$ i $a(x_2)^2 + bx_2 + c = 0$.
- (b) Quan $a = c = 0$ i $b \neq 0$, l'origen és l'únic punt d'equilibri i el polinomi característic de la seva matriu linealitzada és $Q_A(\lambda) = -(\lambda + b)(\lambda^2 + 1)$. Si $b < 0$, tenim un valor propi positiu i dos valors propis impaginaris purs, i deduïm que l'origen és inestable per al sistema no lineal; però si $b \geq 0$, la linealització no decideix l'estabilitat de l'origen.
- (c) Quan $a = b = c = 0$, existeixen infinits punts d'equilibri: $(0, x_2, -x_2)$, x_2 lliure. El polinomi característic de la matriu del sistema linealitzat és $Q_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1 - x_2)$. Per tant, si $x_2 > 1$ tenim un valor propi positiu, un valor propi negatiu i un valor propi nul, i deduïm que el punt $(0, x_2, -x_2)$ és inestable però no repulsor en el sistema no lineal. En cas contrari, la linealització no decideix l'estabilitat del punt $(0, x_2, -x_2)$ en el sistema no lineal.
- (d) $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ quantifica la distància a l'origen. Com que $x_1 = b = c$ veiem que la derivada temporal d'aquesta funció és $W(\mathbf{x}) = a(x_2)^2 > 0$, i per tant la trajectòria s'allunya de l'origen.

35. El punt $(1, 1)$ és d'equilibri per al sistema

$$\begin{cases} x' &= x(1 - y), \\ y' &= y(x - 1). \end{cases}$$

- (a) Classifiqueu el sistema linealitzat en aquest punt. La linealització decideix l'estabilitat?
- (b) Proveu que la funció $V(x, y) = x + y - \ln(xy)$ té un mínim local estricte en $(1, 1)$ i calculeu la seva derivada temporal.
- (c) Deduïu que el sistema té un centre no lineal al punt $(1, 1)$. Com es comporten les trajectòries al seu voltant?
- (d) A quines zones del pla (x, y) s'expandeixen àrees? I a quines es contrauen?

Solució:

- (a) El sistema linealitzat té valors propis $\lambda_{1,2} = \pm i$, i per tant la linealització no decideix l'estabilitat.

- (b) N'hi ha prou amb observar que $V(x, y) = h(x) + h(y)$, essent la funció $h(s) = s - \ln s$ decreixent a l'interval $(0, 1)$ i creixent a l'interval $(1, \infty)$. La derivada temporal de la funció $V(x, y)$ és idènticament nul·la.
- (c) El punt $(1, 1)$ és un centre no lineal, ja que el sistema linealitzat és un centre i $V(x, y)$ és una integral primera. Per tant, totes les trajectòries del sistema no lineal properes al punt $(1, 1)$ giren al seu voltant (en sentit antihorari, vegeu problema 2) i són periòdiques. A més, el període d'aquestes trajectòries periòdiques tendeix a $T = 2\pi/|\operatorname{Im} \lambda_{1,2}| = 2\pi$ quan ens apropem al punt $(1, 1)$.
- (d) La divergència del sistema és $\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = x - y$. Així doncs, les àrees s'expandeixen al semiplà $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ i es contrauen al semiplà $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$.

36. L'origen és un punt d'equilibri del sistema

$$\begin{cases} x'_1 &= \mu x_1^3 - 2x_2 + x_2x_3, \\ x'_2 &= \mu x_2^3 + x_1 - x_1x_3, \\ x'_3 &= \mu x_3^3 + x_1x_2, \end{cases}$$

essent μ un paràmetre real.

- (a) Estudieu, si és possible, l'estabilitat de l'origen pel mètode de linealització.
- (b) Estudieu l'estabilitat de l'origen per Lyapunov, usant una funció de la forma

$$V(\mathbf{x}) = \frac{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2}{2},$$

amb valors adequats per a c_1 , c_2 i c_3 .

- (c) Sigui $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ la solució que s'obté amb la condició inicial

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 1.$$

Per a quins valors de μ és decreixent la funció $x_2(t)$ per a $t = 0$? I per a quins és creixent? Per a quins valors de μ té un mínim local estricte la funció $x_2(t)$ per a $t = 0$? I per a quins té un màxim local estricte?

Solució:

- (a) Els valors propis de la matriu del sistema linealitzat són $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$ i $\lambda_3 = 0$. Per tant, la linealització no decideix l'estabilitat de l'origen per al sistema no lineal, ja que tots els valors propis tenen part real nul·la.
- (b) Prenent $c_2 = 2c_1$, $c_3 = c_1$ i $c_1 > 0$ arbitrari, la derivada temporal $W(\mathbf{x}) = \mu c_1(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4)$ és definida positiva si $\mu > 0$, definida negativa si $\mu < 0$, i idènticament nul·la si $\mu = 0$. Per tant, l'origen és un repulsor si $\mu > 0$, un atractor si $\mu < 0$ i estable però no atractor si $\mu = 0$.
- (c) Com que $x'_2(0) = \mu x_2^3(0) + x_1(0) - x_1(0)x_3(0) = 8\mu$, distingim tres casos.
- $\mu > 0 \Rightarrow x'_2(0) > 0 \Rightarrow x_2(t)$ és creixent en $t = 0$;
 - $\mu < 0 \Rightarrow x'_2(0) < 0 \Rightarrow x_2(t)$ és decreixent en $t = 0$; i
 - $\mu = 0 \Rightarrow x'_2(0) = 0$, i per tant necessitem més derivades:

$$\begin{aligned} x'_1(0) &= -2x_2(0) + x_2(0)x_3(0) = -2 \\ x'_3(0) &= x_1(0)x_2(0) = -2 \\ x''_2(0) &= x'_1(0) - x'_1(0)x_3(0) - x_1(0)x'_3(0) = -2. \end{aligned}$$

Com que $x''_2(0) < 0$, resulta que $x_2(t)$ té un màxim local estricte en $t = 0$.

37. A la figura podem veure el retrat de fase d'un sistema autònom 2D, amb tres punts d'equilibri: A , B i C .

- Classifiqueu els tres punts d'equilibri.
- Hi ha algun punt d'equilibri atractor? En cas afirmatiu, digueu quin i assenyalau la seva cuenca de atracció a la figura.
- Hi ha algun punt d'equilibri repulsor? En cas afirmatiu, digueu quin i expliqueu si les trajectòries que comencin prop d'aquest punt poden aproximar-se als altres dos punts d'equilibri. Justifiqueu les respostes.
- Existeix alguna solució periòdica no constant? En cas afirmatiu, digueu si és atractora, estable o repulsora.

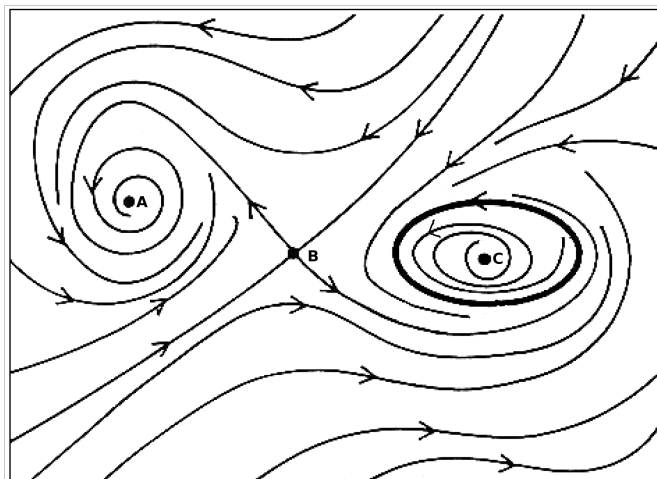


Figura 16: Retrat de fase d'un sistema autònom 2D.

Solució:

- A és un focus atractor, B és una sella i C és un focus repulsor.
- L'únic punt d'equilibri atractor és A , i la seva conca de atracció és la regió a l'esquerra de la corba invariant estable de la sella B .
- El punt de sella B no és un repulsor, ja que existeixen trajectòries que tendeixen a aquest punt quan $t \rightarrow \infty$. Per tant, l'únic repulsor és C . Pel teorema d'existència i unicitat, les trajectòries que comencin prop de C no poden superar la barrera que representa la trajectòria marcada en traç gruixut que el rodeja completament. Per tant, les trajectòries que comencin prop de C no poden aproximar-se ni a A ni a B .
- La trajectòria marcada en traç gruixut és l'única trajectòria periòdica no constant que apareix a la figura. És atractora, ja que totes les trajectòries properes hi tendeixen quan $t \rightarrow \infty$.

Modelització (aplicacions de les EDOs)

38. Hom suposa que la fricció que frena la caiguda d'un paracaigudista és proporcional al quadrat de la velocitat. Si k és la constant de proporcionalitat, g l'acceleració de la gravetat i m la massa del

paracaigudista, escriviu l'equació diferencial que compleix la velocitat $v(t)$, prenent el sentit de caiguda com a positiu (equació del paracaigudista). Calculeu la velocitat terminal v_∞ del paracaigudista; és a dir, la velocitat de caiguda per a la qual les forces de fricció i gravetat es compensen.

Solució: L'equació és $mv' = mg - kv^2$. Resolent l'edo de variables separables i posant $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ tenim $-\frac{m}{2ak} \int \left(\frac{1}{v+a} - \frac{1}{v-a} \right) dv = t + c$. Integrant queda: $\frac{m}{2ak} \ln \left(\left| \frac{v+a}{v-a} \right| \right) = t + c$ i quan $t \rightarrow +\infty$, la velocitat ha de tendir a a i, per tant, la velocitat terminal és $v_\infty = \sqrt{mg/k}$.

39. Tenim un pèndol de longitud l , del qual penja una massa m , sota un camp gravitatori d'intensitat g , i suposem que la fricció és proporcional a la velocitat, amb coeficient k .

(a) Justifiqueu que el moviment del pèndol ve modelitzat per la següent EDO no lineal de segon ordre:

$$\theta'' + m^{-1}k\theta' + l^{-1}g \sin \theta = 0,$$

on $\theta(t)$ és l'angle que forma el pèndol amb la vertical inferior. Quines dades necessitem per plantejar un PVI?

- (b) Escriviu aquesta equació com un sistema d'EDOs no lineal (de primer ordre), introduint la velocitat angular $\omega = \theta'$.
 (c) Estudieu, si és possible, l'estabilitat de les dues posicions d'equilibri del pèndol pel mètode de linealització.
 (d) Comproveu que l'energia mecànica total

$$V(\theta, \omega) = \frac{m}{2}l^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

no creix al llarg de les trajectòries. Al llarg de quines trajectòries es manté constant l'energia?

- (e) Proveu que el pèndol amb fricció no té cap trajectòria periòdica no constant.

Solució:

- (a) És una conseqüència de la segona llei de Newton. Angle inicial $\theta_0 = \theta(0)$ i velocitat inicial $\omega_0 = \theta'(0)$.
 (b) Introduint la velocitat angular $\omega = \theta'$, reescrivim l'EDO de segon ordre com el següent sistema autònom no lineal:

$$\begin{cases} \theta' &= \omega, \\ \omega' &= -a\omega - c \sin \theta, \end{cases}$$

on $a = k/m$ i $c = g/l$.

- (c) Busquem els punts d'equilibri del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \theta' = \omega = 0 \\ \omega' = -a\omega - c \sin \theta = 0 \end{array} \right\} \implies (\theta, \omega) = (n\pi, 0), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aquests punts d'equilibri corresponen a les posicions d'equilibri inferior (si n és parell) i superior (si n és senar) del pèndol. La matriu del sistema linealitzat en el punt d'equilibri $(\theta, \omega) = (n\pi, 0)$ és igual a

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos \theta & -a \end{pmatrix}_{(\theta, \omega) = (n\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1}c & -a \end{pmatrix}.$$

Si n és senar, $\det A_n = (-1)^n c = -c < 0$ i el sistema linealitzat és una sella. Per tant, la posició d'equilibri superior del pèndol és inestable. En canvi, si n és parell, aleshores $\det A_n = (-1)^n c = c > 0$ i $\text{tr } A_n = -a < 0$. Per tant, la posició d'equilibri inferior és un atractor, per al pèndol amb fricció.

(d) La derivada temporal de l'energia mecànica total és

$$W(\theta, \omega) = \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \omega)\theta' + \frac{\partial V}{\partial \omega}(\theta, \omega)\omega' = mgl\omega \sin \theta - ml^2 c\omega \sin \theta - ml^2 a\omega^2 = -kl^2\omega^2 \leq 0,$$

on hem usat que $a = k/m$, $c = g/l$ i $k > 0$. Aquesta derivada temporal és nul·la si i només si $\omega = 0$. Per tant, l'energia només es manté constant sobre les posicions d'equilibri.

(e) La divergència del camp vectorial associat al sistema és sempre negativa.

40. Tenim una partícula de massa 1 que es desplaça sense fricció sobre una recta sota l'acció d'una força conservativa $F(x)$. Es diu que aquesta força prové d'un potencial $U(x)$ quan

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}(x).$$

D'acord amb la segona llei de Newton, la partícula compleix l'EDO de segon ordre

$$x'' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Introduint la velocitat $v = x'$, escriviu aquesta EDO de segon ordre com un sistema d'EDOs de primer ordre (sistema conservatiu amb 1 grau de llibertat).

(b) L'energia (cinètica + potencial) de la partícula és

$$E(x, v) = v^2/2 + U(x).$$

Calculeu la derivada temporal de l'energia. Quina relació existeix entre les solucions del sistema i les corbes de nivell de l'energia? Quina relació existeix entre la gràfica del potencial i el croquis del sistema? Deduïu que, si en algun moment la partícula té energia E_0 , aleshores la seva energia potencial mai no supera el valor E_0 .

(c) Proveu que $(x_*, 0)$ és un punt d'equilibri del sistema quan x_* és un punt crític del potencial, és a dir, quan $\frac{dU}{dx}(x_*) = 0$. Proveu que, a més, $(x_*, 0)$ és un punt d'equilibri inestable o un centre no lineal quan $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*)$ és positiva o negativa, respectivament.

(d) Considerem la força que prové del potencial $U(x) = (x^2 - 1)^2$. Calculeu les posicions d'equilibri i l'estabilitat de cadascuna. Dibuixeu un croquis de les trajectòries. Pot escapar-se la partícula cap a $\pm\infty$? Per a quins valors de l'energia existeixen solucions fitades?

(e) Feu el mateix per a la força que prové del potencial $U(x) = x^3/3 - x^2/2$.

Solució:

(a) Introduint la velocitat $v = x'$, obtenim el següent sistema autònom no lineal

$$\begin{cases} x' &= v, \\ v' &= F(x). \end{cases}$$

(b) La derivada temporal de l'energia és idènticament nul·la:

$$W(x, v) = \frac{\partial E}{\partial x}(x, v)x' + \frac{\partial E}{\partial v}(x, v)v' = \frac{dU}{dx}(x)v + vF(x) = 0.$$

Per tant, les trajectòries del sistema estan contingudes en les corbes de nivell

$$C(E_0) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : E(x, v) = E_0\} = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2\sqrt{E_0 - U(x)} \right\}.$$

L'arrel quadrada només està definida quan $U(x) \leq E_0$ i el signe $\pm$ que la precedeix implica que totes les corbes de nivell són simètriques respecte l'eix horitzontal. Per saber en quin sentit es

mou la partícula sobre cada corba de nivell, notem que la velocitat $x' = v$ és positiva en el semiplà $\{v > 0\}$ i negativa en el semiplà $\{v < 0\}$. Per tant, la partícula es mou cap a la dreta/esquerra en el semiplà superior/inferior.

Si en un instant $t = t_0$ tenim $E(x(t_0), v(t_0)) = E_0$, aleshores

$$E(x(t), v(t)) = v(t)^2/2 + U(x(t)) = E_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particular, $U(x(t)) = E_0 - v(t)^2/2 \leq E_0$ per a tot t .

- (c) La condició necessària i suficient per tal que (x_*, v_*) sigui un punt d'equilibri del sistema és:

$$\left. \begin{aligned} x' &= v_* = 0 \\ v' &= -F(x_*) = 0 \end{aligned} \right\} \iff \frac{dU}{dx}(x_*) = 0, \quad v_* = 0.$$

La matriu del sistema linealitzat en el punt d'equilibri $(x, v) = (x_*, 0)$ és:

$$A(x_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{dF}{dx}(x_*) & 0 \end{pmatrix}_{(x,v)=(x_*,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) < 0$, aleshores $\det A(x_*) < 0$ i el sistema linealitzat és una sella, i per tant la posició d'equilibri $x = x_*$ és inestable.

Si $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) > 0$, aleshores $\det A(x_*) > 0$ i $\text{tr } A(x_*) = 0$, i per tant el sistema linealitzat és un centre i la linealització no decideix l'estabilitat en $x = x_*$. Per tant, usem l'energia com a funció de Lyapunov. Com que sabem que el potencial $U(x)$ té un mínim local estricte en $x = x_*$, resulta que l'energia $E(x, v) = v^2/2 + U(x)$ té un mínim local estricte en $(x, v) = (x_*, 0)$. A més, la seva derivada temporal és idènticament nul·la. Per tant, la posició d'equilibri $x = x_*$ correspon a un centre no lineal, estable però no atractor.

- (d) El potencial $U(x) = (x^2 - 1)^2$ té mínims globals en $x = \pm 1$, un màxim local estricte en $x = 0$, i $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = \infty$. A més, $U(0) = 1$ i $U(\pm 1) = 0$. Per tant, el sistema té 3 punts d'equilibri: $(\pm 1, 0)$ que són centres no lineals, i $(0, 0)$ que és inestable.

Dibuixem les corbes de nivell $C(E_0)$. Mirant la gràfica del potencial $U(x)$ distingim 4 casos: (1) si $E_0 = 0$, aleshores $C(E_0) = \{(\pm 1, 0)\}$; (2) si $E_0 \in (0, 1)$, aleshores $C(E_0)$ conté dues corbes tancades al voltant dels punts $(\pm 1, 0)$; (3) si $E_0 = 1$, aleshores $C(E_0)$ té la forma del signe '∞', amb el punt d'equilibri inestable situat a l'encreuament, ja que

$$C(1) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2\sqrt{1 - (1 - x^2)^2} \right\} = \left\{ (x, \pm 2|x|\sqrt{2 - x^2}) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \right\};$$

i (4) si $E_0 > 1$, aleshores $C(E_0)$ és una corba tancada al voltant del llaç anterior. La partícula mai no pot escapar a $\pm\infty$, ja que cap de les corbes de nivell ho fa. Així doncs, totes les solucions són fitades.

- (e) El potencial $U(x) = x^3/3 - x^2/2$ té un mínim local estricte en $x = 1$, un màxim local estricte en $x = 0$, i tenim $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = \pm\infty$. A més, $U(0) = 0$ i $U(1) = -1/6$. Per tant, el sistema té 2 punts d'equilibri: $(0, 0)$ que és inestable i $(1, 0)$ que és un centre no lineal.

Mirant la gràfica del potencial $U(x)$, veiem com són les corbes de nivell de l'energia $E(x, v)$: (1) si $E_0 \in (-\infty, -1/6] \cup (0, \infty)$, aleshores $C(E_0)$ és una corba oberta que escapa a ∞ quan $x \rightarrow -\infty$; (2) si $E_0 \in (-1/6, 0)$, aleshores $C(E_0)$ conté una corba tancada al voltant del punt $(1, 0)$ i una corba oberta que escapa a ∞ quan $x \rightarrow -\infty$; i (3) si $E_0 = 0$, aleshores $C(E_0)$ té forma d'un llaç (semblant a una 'α' invertida) al voltant del punt d'equilibri estable $(1, 0)$, amb una autointersecció al punt d'equilibri inestable $(0, 0)$.

Finalment, existeix alguna solució fitada d'energia E_0 si i només si la corba de nivell $C(E_0)$ conté alguna corba tancada, és a dir, quan $-1/6 \leq E_0 \leq 0$.

42. (a) Resoleu l'EDO lineal no homogènia de primer ordre a coeficients constants

$$c'(t) + pc(t) = q,$$

on $p > 0$ i $q \in \mathbb{R}$. Calculeu $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ en funció de p i q .

- (b) Resoleu l'EDO lineal no homogènia de primer ordre a coeficients constants

$$c'(t) + pc(t) = \beta e^{-lt},$$

on $l, p > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Distingiu els casos $l \neq p$ i $l = p$. Calculeu $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$.

- (c) Estudiem l'evolució de les concentració de sal en tres dipòsits connectats com s'indica a la figura, suposant que els seus volums V_1, V_2, V_3 (en m^3) es mantenen constants, i les entrades a els dos primers dipòsits tenen cabals r_1, r_2 (en m^3/h) i concentracions e_1, e_2 (en kg/m^3). Quins són els tres cabals de sortida? Sigui $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ les concentracions de sal a l'instant t (en kg/m^3). Plantegeu el sistema d'EDOs lineals no homogènies de primer ordre a coeficients constants que compleixen aquestes concentracions.
- (d) Usant els apartats anteriors, calculeu els límits de les tres concentracions quan el $t \rightarrow \infty$, en funció dels cabals i concentracions d'entrada, tot comprovant que aquests límits no depenen de les concentracions inicials a cada dipòsit. Interpreteu físicament aquests límits.

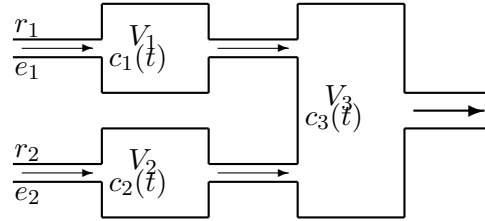


Figura 17: Tres dipòsits connectats.

Solució:

- (a) La solució general és $c_g(t) = q/p + ke^{-pt}$, amb $k \in \mathbb{R}$ lliure, i veiem que $\lim_{t \rightarrow \infty} c_g(t) = q/p$.
- (b) Si $l \neq p$, llavors $c_g(t) = ke^{-pt} + \beta e^{-lt}/(p - l)$. Si $l = p$, llavors $c_g(t) = (k + \beta t)e^{-pt}$. En ambdós casos, $k \in \mathbb{R}$ és lliure i $\lim_{t \rightarrow \infty} c_g(t) = 0$.
- (c) Els cabals de sortida són r_1, r_2 i $r_3 = r_1 + r_2$. Les quantitats de sal relacionades amb els dos primers dipòsits a l'instant t són les següents: $V_j c_j(t)$ a l'interior, $r_j e_j$ entrada per unitat de temps i $r_j c_j(t)$ sortida per unitat de temps. Per tant, $V_j c'_j(t) = r_j e_j - r_j c_j(t)$. Així doncs, obtenim les EDOs lineals de primer ordre

$$c'_j(t) + p_j c_j(t) = q_j, \quad p_j = r_j/V_j, \quad q_j = e_j p_j, \quad j = 1, 2.$$

Les quantitats al tercer dipòsit són: $V_3 c_3(t)$ a l'interior, $r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t)$ entrada per unitat de temps i $r_3 c_3(t)$ sortida per unitat de temps. Per tant, $V_3 c'_3(t) = r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t) - r_3 c_3(t)$. Així doncs, obtenim l'EDO lineal de primer ordre

$$c'_3(t) + p_3 c_3(t) = r_1 c_1(t)/V_3 + r_2 c_2(t)/V_3, \quad p_3 = r_3/V_3.$$

- (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = e_1, \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = e_2$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} c_3(t) = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/(r_1 + r_2)$, és a dir, la concentració als dos primers dipòsits tendeix a igualar-se a la concentració de les seves úniques entrades, ja que flueixen amb concentració constant, mentre que la concentració del tercer dipòsit tendeix a una mitjana ponderada de les concentracions límit de les seves dues entrades. Els coeficients que quantifiquen la ponderació són els respectius cabals d'entrada.

43. Volem estudiar l'evolució en la concentració d'un contaminant en els llacs Erie i Ontario, connectats per un riu que flueix del primer al segon. Siguin V_E i V_O els volums respectius, en m^3 (milles cúbiques), i siguin r_E i r_O els cabals respectius de sortida, en m^3/any . Es compleix que $r_O > r_E$, ja que el llac Ontario rep tot els que surt del llac Erie i quelcom més. Siguin e_E i e_O les concentracions de contaminants que entren a cada llac des de l'exterior, en kg/m^3 . Siguin $c_E(t)$ i $c_O(t)$ les concentracions de contaminants que hi ha en cada llac a l'instant t .

Escriviu el sistema d'equacions diferencials que compleixen les funcions $c_E(t)$ i $c_O(t)$. És un sistema lineal? De manera intuïtiva, i sense resoldre el sistema, quin serà el límit d'aquestes concentracions quan $t \rightarrow \infty$? Com es poden interpretar els quocients $p_E = r_E/V_E$ i $p_O = r_O/V_O$? Finalment, calculeu la solució general si considerem els valors:

$$V_E = 116, \quad V_O = 393, \quad r_E = 85, \quad r_O = 99.$$

[Obs.: En realitat, aquest problema es planteja de manera simultània per als cinc Grans Llacs: Superior, Michigan, Huron, Erie i Ontario (vegeu el model complet a [Bender] i [McKelvey]).]

Solució: La quantitat de contaminant, per unitat de temps, que entra i surt de cada llac són:

- per al llac Erie, $r_E e_E$ i $r_E c_E(t)$ respectivament;
- per al llac Ontario, $r_E c_E(t) + (r_O - r_E)e_O$ i $r_O c_O(t)$ respectivament.

Per tant, obtenim el següent sistema lineal a coeficients constants:

$$\begin{cases} c'_E &= r_E(e_E - c_E)/V_E, \\ c'_O &= ((r_O - r_E)e_O + r_E c_E - r_O c_O)/V_O. \end{cases}$$

Les concentracions tendiran a igualar-se amb les respectives concentracions d'entrada: e_E per al llac Erie i $(r_E e_E + (r_O - r_E)e_O)/r_O$ per al llac Ontario. Podríem interpretar els quocients p_E i p_O com la proporció deigua que es renova en un any a cada llac, tot i que no és exactament així. Finalment, la solució general obtinguda amb els valors concrets és

$$c_E(t) = c_1 e^{-p_E t} + e_E, \quad c_O(t) = c_1 \alpha e^{-p_E t} + c_2 e^{-p_O t} + (85e_E + 14e_O)/99.$$

on $p_E = 85/116 \approx 0.73$, $p_O = 33/131 \approx 0.25$ i $\alpha = \frac{r_E p_O}{r_O(p_O - p_E)} = -9860/21921 \approx -0.45$. Com més grans són p_E i p_O , més ràpid s'estabilitzen les concentracions de contaminants. És lògic que sigui així?

44. Aboquem en un tanc d'aigua un compost granulat esfèricament, sol·luble en aigua. Quan les condicions de temperatura i concentració varien poc, és raonable suposar que (la massa de) cada gra es dissol de manera proporcional a la seva superfície. Siguí $k > 0$ la constant de proporcionalitat i ρ la densitat del compost. Escriuiu l'equació diferencial que satisfà el radi $r(t)$ d'un gra. Quines són les unitats de k ?

Solució: L'equació és $r' = -k/\rho$ i la solució general és $r(t) = r_0 - kt/\rho$. És a dir, el radi de cada gra decreix a velocitat constant. Les unitats SI de k són $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, ja que k quantifica la massa dissolta per unitat de temps i superfície.

45. La desintegració radioactiva (vegeu Wikipedia i un applet de Java) d'una partícula inestable és un procés aleatori que no pot ésser predit, però és sabut que aquesta desintegració és igualment probable en tots els instants. Per tant, donada una mostra d'un isòtop radioactiu, el nombre de desintegracions en un moment donat és proporcional al nombre d'àtoms radioactius existents en aquest moment.

Siguí λ la constant de proporcionalitat, que rep el nom de constant de desintegració. Plantegeu l'equació que compleix el nombre d'àtoms $N(t)$.

La semivida $t_{1/2}$ és el temps que ha de transcórrer perquè la meitat dels àtoms inicials s'hagin desintegrat. Relacioneu $t_{1/2}$ i λ .

Solució: L'equació és $N' = -\lambda N$ i la seva solució general és $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, essent N_0 el nombre inicial d'àtoms. La relació és $\lambda t_{1/2} = \ln 2$.

46. La datació per carboni-14 va permetre, l'any 1950, estimar la data en què es van fer les pintures rupestres de Lascaux. La semivida del ^{14}C és (aproximadament) de 5730 ± 40 anys. Sabent que una mostra de carbó de la cova de Lascaux va donar una mitjana de 0.97 desintegracions de ^{14}C per minut i gram, mentre que en arbres vius sol ésser de 6.68, estimeu la data de les pintures.

Solució: La data aproximada és $5730(\ln 6.68 - \ln 0.97)/\ln 2 = 15951$ anys abans de 1950, és a dir, cap a l'any 14000 aC.

47. L'estatocol·lector de Bussard és un disseny molt optimista de nau estel·lar que ha aparegut a múltiples llibres de ciència-ficció (Niven, Benford, etc) i també és conegut pels trekkies. Consisteix en una nau que captura matèria estel·lar mitjançant un camp magnètic gegantí ancorat a la proa. Aquesta matèria és fusionada i expulsada en raig per la popa, impulsant d'aquesta manera la nau. L'avantatge d'aquest disseny és que no cal transportar combustible. La força d'impulsió generada en cada instant pels motors d'aquesta hipotètica nau és igual a la massa de matèria estel·lar capturada per unitat de temps multiplicada per la diferència entre la velocitat v_c del raig de partícules expulsades i la velocitat $v(t)$ de la nau. Escriviu l'equació diferencial que compleix $v(t)$. Identificar l'equació i descriure el comportament asimptòtic (quan $t \rightarrow \infty$) de la nau.

Solució: L'equació és $mv' = \rho S v(v_c - v)$, on m és la massa de la nau, ρ és la densitat de la matèria estel·lar a l'espai i S és la superfície escombrada pel camp magnètic de la nau. És una equació logística, ja que v_c és una constant. Per tant, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_c$, suposant que $v(0) > 0$.

48. Un altre disseny de propulsió més realista que el del problema 47 són les veles solars, que utilitza la radiació solar per a impulsar-se. De fet, les agències espacials JAXA (japonesa) i NASA han dut a terme missions amb veles solars (IKAROS i NanoSail-D respectivament). L'impuls d'una vela solar és proporcional al nombre de fotons que impacten sobre ella. Escriviu l'equació diferencial que compleix la distància $d(t)$ de la vela al sol, tot menyspreant la fricció. Quan s'allunya del Sol, menys fotons impacten sobre la vela, amb la qual cosa la velocitat de la vela va disminuint... És correcte aquest "raonament"?

Solució: L'equació és $md'' = k/d^2$, on m és la massa de la vela i $k > 0$ és una constant de proporcionalitat, ja que la quantitat de fotons és inversament proporcional al quadrat de la distància. No és cert que la velocitat disminueixi en allunyar-se del Sol, ja que $d''(t) > 0$ i per tant la velocitat $d'(t)$ és estrictament creixent, tot i que es pot comprovar que tendeix a una velocitat límit.

49. Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les densitats de població de dues espècies aïllades de preses i depredadors. Suposem que les interrelacions entre aquestes espècies compleixen els principis següents:

- si no hi ha depredadors, la població de preses creix exponencialment (Malthus);
- si no hi ha preses, la població de depredadors decreix exponencialment;
- el nombre d'encontres entre un depredador i una presa és proporcional al producte de les dues densitats;
- cada encontre entre depredador i presa incrementa la població de depredadors i disminueix la població de preses.

Aleshores, el model que estem considerant (model Lotka–Volterra per a un sistema depredador–presa) ve donat pel següent sistema no lineal 2D,

$$\begin{cases} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(dx - c) \end{cases}$$

on les quantitats $a, b, c, d > 0$ són les constants de proporcionalitat que representen la interacció entre ambdues espècies.

- (a) Calculeu, classifiqueu i dibuixeu un croquis del sistema linealitzat al voltant de l'origen.
- (b) Trobeu l'altre punt d'equilibri del sistema. Calculeu, classifiqueu i dibuixeu un croquis del sistema linealitzat al voltant d'aquest segon punt d'equilibri.
- (c) Determineu, si és possible, l'estabilitat dels punts d'equilibri en el sistema no lineal, pel mètode de linealització.
- (d) El primer quadrant és l'únic amb sentit biològic. Proveu que aquest quadrant és invariant, mitjançant l'estudi del camp de vectors sobre els eixos de coordenades.
- (e) Considerem la funció

$$V(x, y) = \gamma \ln x + \alpha \ln y - \delta x - \beta y,$$

definida al primer quadrant, on les quantitats α , β , γ i δ són paràmetres estrictament positius. Trobeu els valors que han de tenir aquests paràmetres (en funció de a , b , c i d) per tal que $V(x, y)$ sigui una integral primera (quantitat conservada) del sistema.

- (f) Dibuixeu el retrat de fase global del sistema.

Solució:

- (a) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$, i deduïm que el sistema linealitzat és una sella, i la seva direcció d'entrada/sortida és l'eix vertical/horitzontal.
- (b) L'altre punt d'equilibri és $(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$, la matriu del sistema linealitzat en aquest punt és $A = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{pmatrix}$, i deduïm que és un centre de període $2\pi/\sqrt{ac}$ i sentit de gir antihorari.
- (c) L'origen és inestable per al sistema no lineal. La linealització no decidix l'estabilitat del punt $(c/d, a/b)$.
- (d) Una possible tria és $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ i $\delta = d$.
- (e) Totes les trajectòries són contingudes en corbes de nivell de $V(x, y)$, que són corbes tancades al voltant de $(c/d, a/b)$, que correspon a un centre no lineal. Aquestes corbes es recorren en sentit antihorari, amb un període que tendeix a $2\pi/\sqrt{ac}$ quan ens apropem al punt $(c/d, a/b)$.

50. Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les densitats de població de dues espècies competitives, és a dir, dues espècies aïllades que competeixen per un recurs limitat. Modelitzem l'evolució de les poblacions mitjançant el següent sistema no lineal 2D,

$$\begin{cases} x' = kx(1 - x/m - \alpha y), \\ y' = ly(1 - \beta x - y/n), \end{cases}$$

on tots els paràmetres que apareixen són positius. Per simplificar els càlculs, suposarem que

$$k = m = \alpha = 1, \quad l = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad n = 2.$$

- (a) Calculeu els 4 punts d'equilibri del sistema, classifiqueu el sistema linealitzat en cadascun i estudieu, si és possible, la seva estabilitat pel mètode de linealització.
- (b) La component x' s'anul·la a l'eix vertical i en una recta r , mentre que y' s'anul·la a l'eix horitzontal i en una recta s . És possible que una trajectòria que comença al primer quadrant (l'únic amb sentit biològic), salti a un altre quadrant? Justifiqueu la resposta. Calculeu i dibuixeu les rectes r i s . Aquestes rectes divideixen el primer quadrant en quatre regions. Descriviu el signe que tenen les quantitats x' i y' en cadascuna d'aquestes regions i interpreteu biològicament el resultat.
- (c) Esbosseu el retrat de fase del sistema. Deduïu que, sota quasi qualsevol condició inicial, només sobreviu una de les dues espècies (principi d'exclusió competitiva).

Solució:

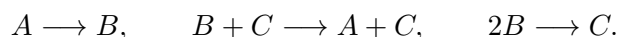
- (a) Els punts d'equilibri són $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ i $C = (1/2, 1/2)$, i les matrius dels sistemes linealitzats en aquests punts són

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad M_C = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Els valors propis de M_O són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1/2$, per tant el punt O és un node propi repulsor. Els valors propis de M_A són $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -1/4$, i valors propis de M_B són $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -1/2$, per tant A i B són nodes propis atractors. Finalment, els valors propis de M_C són $\lambda_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{57})/16$, i per tant el punt C és una sella (inestable). La linealització decideix l'estabilitat a tots quatre casos.

- (b) L'eix horitzontal és invariant (ja que tenim $y' = 0$ sobre aquest eix). L'eix vertical també és invariant (ja que $x' = 0$). Per tant, no és possible sortir del primer quadrant degut al teorema d'existència i unicitat de solucions. Les rectes són $r = \{y = 1 - x\}$ i $s = \{y = 2 - 3x\}$. La recta r passa pels punts $A = (1, 0)$ i $D = (0, 1)$, i la recta s passa pels punts $E = (2/3, 0)$ i $B = (0, 2)$; ambdues rectes s'intersequen al punt $C = (1/2, 1/2)$. A la regió quadrangular de vèrtexs O , A , B i C , tenim $x', y' > 0$, i per tant ambdues poblacions creixen. A la regió triangular de vèrtexs B , D i C , tenim $x' < 0$ i $y' > 0$, i per tant la segona espècie guanya la competició. A la regió triangular de vèrtexs A , E i C tenim $x' > 0$ i $y' < 0$, i per tant la primera espècie guanya la competició. Finalment, a la regió no fitada que hi ha per damunt de les rectes r i s , tenim $x', y' < 0$, i per tant ambdues poblacions decreixen.
- (c) La corba invariant estable del punt de sella C divideix el primer quadrant en dues parts: si comencem a la part inferior la primera espècie guanya, si comencem a la part superior la segona espècie guanya, i si comencem exactament sobre la corba tendim a un equilibri inestable.

51. En una reacció química triple, amb tres productes A , B i C , s'esdevenen simultàniament els processos



Suposarem que la velocitat de reacció de cada procés és proporcional al producte de les concentracions dels productes (mesurades en mol/l), necessàries perquè aquest procés concret es dugui a terme. Siguin k_1 , k_2 i k_3 les tres constants de proporcionalitat. Plantegeu el sistema d'EDOs que compleixen les concentracions $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$. Quina és la concentració de cada producte a l'equilibri químic? És estable aquest equilibri? [Obs.: Podeu veure un model més adient, tot i que més complicat, a [Bender, p. 190–192].]

Solució: Les concentracions dels 3 productes compleixen el següent sistema no lineal:

$$\begin{cases} x_1' &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 x_3, \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 x_3 - k_3 x_2^2, \\ x_3' &= k_3 x_2^2. \end{cases}$$

A l'equilibri només queda el producte C i és un equilibri estable, ja que $(x_1 + x_2 + x_3)' = 0$ (la quantitat total dels tres productes no varia), però en canvi $x_3' = k_3 x_2^2 \geq 0$ (la quantitat de producte C mai no decreix). Repte: Intenteu aplicar el mètode de linealització.