

Nom i cognoms:

□

Equacions diferencials GETI (240131)

Examen – 29 d'octubre de 2025

Temps: 75 minuts

.....
Escriviu el vostre nom i cognoms, en majúscules, a cada un dels fulls. Responeu de manera concisa però justificant els passos importants. Les respostes no justificades no seran considerades vàlides.

No es pot dur calculadora. Es pot dur formulari: un full dinA-4, manuscrit, fet per vosaltres mateixos; no pot contenir problemes resolts i ha de seguir les pautes indicades a Atenea.

Les notes provisionals, resolució, data de revisió, etc, sortiran publicades a Atenea.

1. (1 punt) Sigui $y = Q(x)$ un polinomi cúbic que talla l'eix $\{y = 0\}$ als punts $(0, 0)$, $(2, 0)$ i $(5, 0)$ i que satisfà que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$. Considereu $x(t)$ la solució de l'edo $x' = Q(x)$ amb condició inicial $x(0) = 4$. Calculeu $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$. Justifiqueu la resposta.

Solució: $Q(x)$ és negatiu per a $x \in (2, 5)$. Per tant, atès que $x(0) = 4 \in (2, 5)$ tenim que $x' < 0$ d'on x decreix fins a arribar – en temps infinit – a $x = 2$. És a dir $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2$.

2. (1 punt) Considereu la solució de l'oscil·lador harmònic $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, amb $\omega > 0$ i condicions inicials $x(0) = 1$ i $\dot{x}(0) = v_0$. Determineu el valor de v_0 de manera que la solució $x(t)$ sigui una ona d'amplitud $\sqrt{2}$.

Solució: Si imposem que la solució general $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ satisfaci les c.i. del problema, s'obté que $c_1 = x_0 = 1$ i $c_2 = \frac{v_0}{\omega}$. L'expressió de $x(t)$ en forma amplitud-fase és del tipus $A \sin(\omega t + \varphi)$ on

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{v_0}{\omega}\right| = 1 \Rightarrow v_0 = \pm \omega.$$

3. (1.5 punts) Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del PVI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

- (i) Sense calcular explícitament $(x(t), y(t))$, doneu l'expressió de l'òrbita que correspon a aquesta trajectòria.
(ii) Calculeu ara la solució $(x(t), y(t))$ i digueu quant val $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t))$.

Nota: no podeu fer servir l'apartat (ii) per a resoldre (i).

Solució: (i) Observeu que $x' + y' = 0$, és a dir, $\frac{d}{dt}(x + y) = 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Per tant $x + y = C$ per a una constant convenient. De la c.i. $(x(0), y(0)) = (-3, 2)$ sabem que l'òrbita conté al punt $(-3, 2)$ i, en conseqüència $C = -3 + 2 = -1$. Per tant, l'òrbita es troba a sobre de la recta $x + y = -1$.

(ii) De la segona equació $y' = -2y$ tenim que $y(t) = c_1 e^{-2t}$. Substituint a la primera,

$$x' = 2y = 2c_1 e^{-2t} \Rightarrow x(t) = c_1 \int 2e^{-2t} dt = -c_1 e^{-2t} + c_2.$$

Si imposem les c.i. $(x(0), y(0)) = (-3, 2)$ s'obté que $c_1 = 2$ i $c_2 = -1$, de manera que la solució buscada és

$$x(t) = -2e^{-2t} - 1, \quad y(t) = 2e^{-2t}.$$

Aleshores, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (-1, 0)$.

4. (1.5 punts) Donada l'edo $x'' + 2\kappa x' + \kappa^2 x = \sin(2\kappa t)$, amb $\kappa > 0$:

- (i) Calculeu, si existeix, una solució periòdica $x_p(t)$.
- (ii) Quant val $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_p(t)|$, per a qualsevulla altra solució $x(t)$?

Solució: (i) Busquem una solució particular del tipus $x_p(t) = A \sin(2\kappa t) + B \cos(2\kappa t)$ Usant que

$$x_p'(t) = 2\kappa A \cos(2\kappa t) - 2\kappa B \sin(2\kappa t), \quad x_p''(t) = -4\kappa^2 A \sin(2\kappa t) - 4\kappa^2 B \cos(2\kappa t),$$

substituint a $x'' + 2\kappa x' + \kappa^2 x = \sin(2\kappa t)$ i igualant els coeficients que multipliquen a $\sin(2\kappa t)$ i $\cos(2\kappa t)$, s'obté el sistema d'equacions:

$$4A = 3B, \quad -3A - 4B = \frac{1}{\kappa^2},$$

on hem tingut en compte que $\kappa \neq 0$. Resolent-lo tenim, com a única solució, $B = -\left(\frac{2}{5\kappa}\right)^2$ i $A = \frac{3}{4}B = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5\kappa}\right)^2$. És a dir,

$$x_p(t) = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5\kappa}\right)^2 \sin(2\kappa t) - \left(\frac{2}{5\kappa}\right)^2 \cos(2\kappa t).$$

(ii) Observeu que la diferència entre dues solucions de l'edo $x'' + 2\kappa x' + \kappa^2 x = \sin(2\kappa t)$ és solució de l'edo homogènia associada $x'' + 2\kappa x' + \kappa^2 x = 0$. Aquesta és una oscil·lació esmorteïda ($\kappa > 0$) i sabem que totes les seves solucions satisfan que tendeixen a 0 quan $t \rightarrow +\infty$. Per tant $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x_p(t)| = 0$.

5. (1 punt) Considereu el sistema d'edos:

$$\begin{cases} x' &= 3x + \alpha y \\ y' &= -x + \beta y \end{cases}$$

amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta > 0$. Pot tenir un punt d'equilibri tipus atractor a l'origen? Justifiqueu la vostra resposta.

Solució: La matriu del sistema és $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$ que té traça $\text{tr}A = 3 + \beta > 0$. Per tant, usant el teorema de Liouville, el sistema $X' = AX$, amb $X = (x, y)$, expandeix àrea al llarg de qualsevol solució. En conseqüència, no pot tenir un punt d'equilibri atractor a l'origen.

6. (2.5 punts) Considereu el sistema d'edos no lineal:

$$\begin{cases} x' = y(1 - x) \\ y' = -2x(1 - x) \end{cases}$$

Aleshores, resoleu les següents qüestions:

- (a) Demostreu que l'origen és un punt d'equilibri i determineu la seva estabilitat.
- (b) Què satisfan els punts de la recta $\{x = 1\}$?
- (c) Per a la trajectòria amb condició inicial $(0, 2)$, determineu $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t))$.

Indicació: en cas que sigui necessari podeu utilitzar una funció del tipus $V(x, y) = ax^2 + by^2$ amb unes $a, b \in \mathbb{R}$ convenients.

Solució:

(a) Substituint $(0, 0)$ al sistema:

$$x' = 0(1 - 0) = 0, \quad y' = -2 \cdot 0(1 - 0) = 0.$$

Per tant, com que l'origen anul·la les derivades, és un punt d'equilibri. Estudiem l'estabilitat amb la matriu Jacobiana:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{amb valors propis } \lambda = \pm i\sqrt{2} \text{ (centre lineal)}.$$

Per tant, el mètode de linealització no decideix l'estabilitat de l'origen per al sistema complet. Busquem aplicar el mètode de Lyapunov usant (com suggereix l'enunciat) una funció del tipus $V(x, y) = ax^2 + by^2$. En primer lloc, cal considerar $a, b > 0$ per tal que l'origen sigui un mínim local estricte de V (és a dir, que V sigui definida positiva a l'origen). Derivant $V(x, y)$ al llarg de trajectòries:

$$\frac{d}{dt}(V(x, y)) = axx' + byy' = axy(1 - x) - 2bx(1 - x) = 4xy(1 - x)(a - 2b).$$

Observeu que el terme xy canvia de signe segons el lloc on ens trobem dels eixos. En canvi, si prenem $a = 2b$, (per exemple, $a = 2$ i $b = 1$), tenim que $V(x, y) = 2x^2 + y^2$ satisfà que

$$\frac{d}{dt}(V(x, y)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

i, per tant, V és constant sobre les trajectòries del sistema. L'origen és aleshores un punt d'equilibri estable no atractor. Al punt $(0, 0)$ tenim un centre no lineal. Les òrbites properes a aquest punt són el·lipses, centrades a l'origen, del tipus $2x^2 + y^2 = k$, amb $k > 0$.

(b) La recta $\{x = 1\}$ és una recta de punts d'equilibri. En efecte, si substituïm $x = 1$ a (x', y') obtenim

$$x' = y(1 - x)|_{x=1} = y(1 - 1) = 0, \quad y' = -2x(x - 1)|_{x=1} = 0.$$

Per tant, tot punt d'ella és punt d'equilibri.

(c) La condició inicial $(0, 2)$ pertany a l'el·lipse $2x^2 + y^2 = 4$, que interseca la recta de punts d'equilibri $x = 1$ als punts:

$$(1, \sqrt{2}) \quad \text{i} \quad (1, -\sqrt{2}).$$

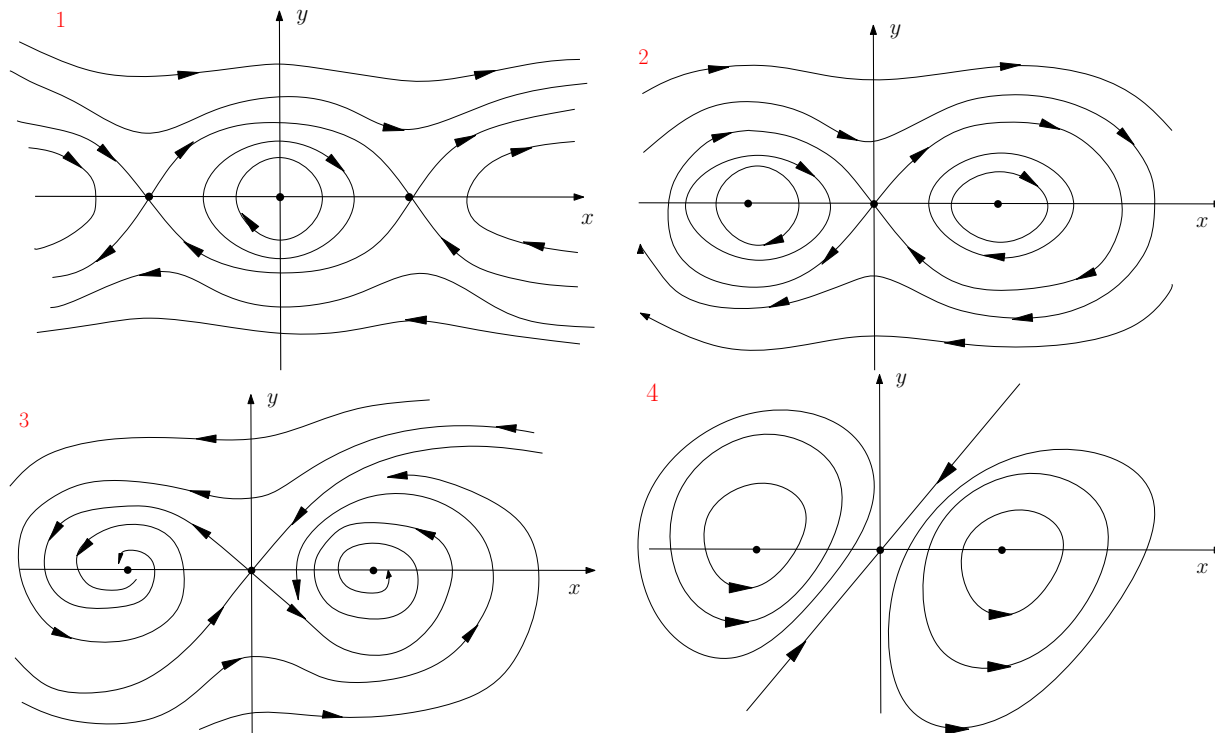
Si considerem les línies de camp del sistema per al punt $(0, 2)$ avaluant x', y' obtenim que el vector tangent és $(2, 0)$, tenint direcció horària. Per tant, el límit és el punt $(1, \sqrt{2})$.

7. (1.5 punts) Considereu el següent sistema no lineal d'edos:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x(x - c)(x + c), \end{cases}$$

amb $c \neq 0$. Dels següents 4 retrats de fases indicats a sota només un d'ells pot correspondre al d'aquest sistema. Quin és? Justifiqueu la resposta.

Indicació. Descarteu els retrats impossibles o no apropiats. Els punts negres a les figures marquen els punts d'equilibri del sistema.



Solució: Segons el sistema, si $y > 0$ aleshores $x' > 0$. Per tant, a la part superior del retrat de fases (amb $y > 0$) el vector de velocitat (x', y') ha de tenir sempre l'orientació *cap a la dreta* a tots els punts. En conseqüència, descartem els retrats de fase (3) i (4) en els quals algunes trajectòries a la part superior es dirigeixen cap a l'esquerra.

Per a triar entre (1) i (2), es pot fer linearització del sistema en el punt d'equilibri $(0, 0)$: els vaps són $\{-c, c\}$. Per tant, per Hartman-Grobman, l'origen és una sella no lineal i el retrat corresponent és (2).

Recordeu que la linealització entorn a un punt d'equilibri no sempre decideix la seva estabilitat local ni el comportament de les òrbites properes per al sistema no lineal. Un exemple important, que aquí és dóna, és el d'un centre lineal, on l'estudi del linealitzat no permet discernir entre un centre no lineal o un focus per al sistema inicial.