

Nom i cognoms:

□

Equacions diferencials GETI (240131)

Examen – 11 d'abril de 2025

Temps: 75 minuts

.....

Escriviu el vostre nom i cognoms, en majúscules, a cada un dels fulls. Responeu de manera concisa però justificant els passos importants. No es pot dur calculadora. Es pot dur formulari: un full dinA-4, manuscrit, fet per vosaltres mateixos; no pot contenir problemes resolts ni demostracions. Les notes provisionals, resolució, data de revisió, etc, sortiran publicades a Atenea.

1. (1 punt) Considereu la següent família de corbes i de camps vectorials:

$$C_\alpha = \{(x, y) \mid y = x^\alpha, x \in [0, 1]\}, \quad \vec{F}_\alpha(x, y) = (\alpha(1 - \alpha y), -\alpha^2 x),$$

per a $0 < \alpha \leq 1$. Calculeu el valor $\alpha^* \in (0, 1]$ que fa màxima la circulació (treball) de $\vec{F}_\alpha$ al llarg de la corba C_α recorreguda amb punt inicial $(0, 0)$:

$$T_\alpha = \int_{C_\alpha} \langle \vec{F}_\alpha, d\vec{\ell} \rangle.$$

Quin és aquest valor T_{α^*} ? A quina corba C_{α^*} i quin camp vectorial $\vec{F}_{\alpha^*}$ correspon?

Solució: Si calculem el seu rot F_α (bé submergint-lo a $\mathbb{R}^3$, bé aplicant la seva versió 2d) tenim que és 0. Atès que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ es dedueix que F_α és conservatiu i, per tant, existeix $f_\alpha(x, y)$ tal que $\nabla f_\alpha = F_\alpha$. D'un càlcul trivial es deriva que $f_\alpha(x, y) = \alpha x(1 - \alpha y)$. Aleshores, usant que totes les corbes de la família C_α comencen a l'origen i acaben al punt $(1, 1)$, tenim

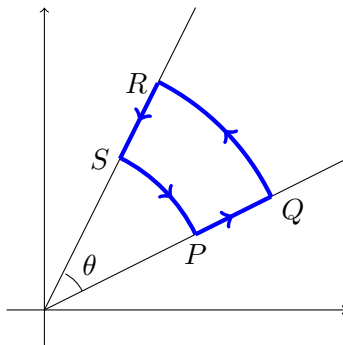
$$T_\alpha = \int_{C_\alpha} \langle \vec{F}_\alpha, d\vec{\ell} \rangle = \int_{C_\alpha} \langle \nabla f_\alpha, d\vec{\ell} \rangle = f(1, 1) - f(0, 0) = \alpha(1 - \alpha).$$

També es pot obtenir calculant-ho directament a partir d'una parametrització de la corba C_α .

El valor màxim de T_α s'obté a $\alpha^* = \frac{1}{2}$ i és igual a $T_{\alpha^*} = T_{1/2} = \frac{1}{4}$. La corba corresponent és $C_{1/2} = \{y = \sqrt{x}, x \in [0, 1]\}$ i el camp és $F_{1/2}(x, y) = (\frac{1}{2}(1 - \frac{y}{2}), -\frac{1}{4}x)$.

2. (1 punt) Considereu el camp radial $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, on $\hat{r} = \vec{r}/r$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i f una funció escalar definida per tot r .

Indiqueu si la circulació del camp $\vec{F}$ al llarg de la corba tancada $PQRSP$ de la figura següent és positiva, negativa, zero o no es pot determinar amb la informació disponible. **Justifiqueu la resposta.** Noteu que els trossos de corba SP i QR es troben sobre circumferències concèntriques de centre l'origen.



Solució: La circulació és 0. Al llarg de QR i SP la circulació és 0 ja que el camp és perpendicular a la corba, ja que es tracta d'un camp radial. La circulació al llarg de PQ es cancel·la amb la circulació al llarg de RS.

3. (1.5 punts) Donats els camps $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ i $\vec{G}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$:

- Calculeu els rotacionals (2D) d'aquests camps. Podem dir que són conservatius? En cas afirmatiu, indiqueu clarament sobre quin tipus de domini.
- Trobeu les circulacions dels camps al llarg d'un quadrat de costat L centrat a l'origen i amb els costats paral·lels als eixos de coordenades, orientat en sentit antihorari.

Indicació. Apliqueu el teorema de Green a la regió compresa entre el quadrat i una circumferència centrada a l'origen que contingui el quadrat en el seu interior.

- Hi ha alguna incoherència o contradicció en el resultat? Justifiqueu raonadament per què.

Solució:

- Si escrivim $\vec{F} = (F_1, F_2)$ i calculem les derivades parcials:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

veiem que el seu rotacional és $\text{rot}(\vec{F}) = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (0, 0, 0)$. Tot i que $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, el domini $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no és simplement connex i, per tant, no podem assegurar que $\vec{F}$ sigui conservatiu en aquest domini.

De manera anàloga, si fem els càlculs amb $\vec{G} = (G_1, G_2)$:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

veiem que el seu rotacional també és $\text{rot}(\vec{G}) = (0, 0, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}) = (0, 0, 0)$. Per tant, com que el domini no és simplement connex, tampoc podem afirmar que sigui conservatiu en el seu domini.

No obstant, tots dos seran conservatius en qualsevol obert simplement connex que no inclogui l'origen. A més, $\vec{G}$ és conservatiu a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ perquè admet la funció potencial ben definida:

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \vec{G} = \nabla g$$

- Segui $\mathcal{Q}$ la corba del quadrat de l'enunciat i C una circumferència de radi $R > \frac{L}{\sqrt{2}}$. Si apliquem el teorema de Green a la regió compresa entre les dues corbes tenim:

$$\begin{aligned} \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0 &= \oint_{\mathcal{Q}_{\text{horari}}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle + \oint_{C_{\text{antihorari}}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle \Rightarrow \\ \oint_{\mathcal{Q}_{\text{antihorari}}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \oint_{C_{\text{antihorari}}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle \end{aligned}$$

On hem utilitzat que quan canviem de sentit la circulació, el seu valor canvia de signe. Per tant, només cal calcular la circulació sobre la circumferència amb el sentit antihorari. Si considerem el camp $\vec{F}$ amb la parametrització $\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\oint_{C_{\text{antihorari}}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \Rightarrow \oint_{\mathcal{Q}_{\text{antihorari}}} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = 2\pi$$

Fent el mateix càlcul amb el camp $\vec{G}$:

$$\oint_{C_{\text{antihorari}}} \langle \vec{G}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt = 0 \implies \oint_{\mathcal{Q}_{\text{antihorari}}} \langle \vec{G}, d\vec{\ell} \rangle = 0$$

- c) No, ja que ser irrotacional no implica que necessàriament sigui conservatiu. A més, no podem aplicar el teorema de Green a l'interior del quadrat per trobar la circulació ja que el domini on els camps són continus no és simplement connex. Per últim, el fet de no tenir domini simplement connex tampoc implica que no hagi de ser conservatiu.

4. (1 punt) Calculeu l'àrea de la superfície $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ limitada per $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

Solució: Mirem la superfície en forma de gràfica $z = f(x, y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, $(x, y) \in D$ i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Aleshores,

$$\text{Àrea}(S) = \int \int_D \|(f_x, f_y, -1)\| dx dy = \int \int_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1} dx dy = \frac{2\pi ab}{3} [2^{3/2} - 1]$$

on hem fet el canvi a coordenades polars adaptades a l'el·lipse: $x/a = r \cos \theta$, $y/b = r \sin \theta$.

5. (1 punt) Calculeu el centre geomètric d'un quart de circumferència i d'un quart de cercle de radi R centrats a l'origen i que es troben en el primer quadrant usant el primer i segon teorema de Pappus-Guldin.

Solució: Sigui C la corba

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2, x, y \geq 0\}$$

corresponent al quart de circumferència de radi R centrada a l'origen corresponent al primer quadrant i la fem girar al voltant de l'eix OY, per tant, aquesta genera la superfície S que correspon a mitja esfera (buida). Apliquem el primer Teorema de Pappus-Guldin i obtenim

$$\bar{x} = \text{dist}(r_C, \text{eix OY}) = \frac{\text{Area}(S)}{2\pi \text{long}(C)} = \frac{2\pi R^2}{2\pi(\pi R/2)} = \frac{2R}{\pi}.$$

Si fem girar ara la corba C al voltant de l'eix OX, per simetria, obtenim que $\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$.

Per tant, $r_C = \left(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi}\right)$.

Sigui D la regió del pla

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\},$$

corresponent al quart de cercle de radi R , centrat a l'origen i situat al primer quadrant. La fem girar al voltant de l'eix OY, per tant, aquesta genera el volum W que correspon a mitja esfera (sòlida). Apliquem el segon Teorema de Pappus-Guldin i obtenim

$$\bar{x} = \text{dist}(r_D, \text{eix OY}) = \frac{\text{Vol}(W)}{2\pi \text{Area}(D)} = \frac{2/3 \pi R^3}{2\pi(\pi R^2/4)} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Com abans, per simetria $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$, i per tant, $r_D = \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$

Nota: es poden considerar definides en altres plans i fer girar respecte altres eixos. Hem usat que són conegudes el volum i l'àrea de l'esfera, l'àrea del cercle i la longitud de la circumferència.

6. (1 punt) Sigui S la superfície $(z - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$, on $0 \leq z \leq 2$.

a) Quina superfície és? Representeu-la

b) Considereu el camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, 1 - 2x, xyz)$. Calculeu, **usant el teorema d'Stokes**, el flux del rot $\vec{F}$ a través de la superfície S orientada pel vector normal que té la tercera component negativa.

Solució:

a) És un con d'eix vertical amb vèrtex al punt $(1, 1, 2)$.

b) Apliquem el teorema de Stokes. La superfície S està orientada segons el vector normal interior (apunta cap a dins). Parametritzem la corba (vora de S) $\partial S = \{(x, y, 0) \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4\}$ recorreguda en sentit horari (per tal de ser compatible amb l'orientació de S): $\sigma(t) = (1 + 2 \cos t, 1 - 2 \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \oint_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (1 - 2 \sin t, -1 - 4 \cos t, 0), (-2 \sin t, -2 \cos t, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 + 2 \cos t - 2 \sin t + 4 \cos^2 t) dt \\ &= (4t + 2t \sin t + 2 \cos t) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 8\pi + 4\pi = 12\pi \end{aligned}$$

7. (1 punt) Sigui $\vec{F}$ el camp vectorial definit a $\mathbb{R}^3$ que per a tot valor de z té aquestes línies de camp:

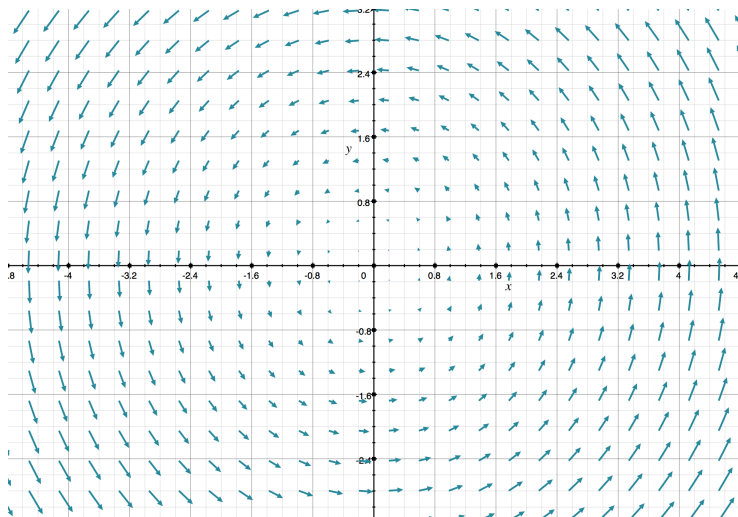


Figura 1: Línies de camp del camp vectorial $\vec{F}$ al pla XY habitual.

Sense fer càlculs, responeu les següents qüestions: (**Només es considerarà correcta la resposta si la justificació és correcta.**)

- La circulació d'aquest camp al llarg d'una circumferència de radi $R > 0$ al pla $z = 0$ centrada a l'origen recorreguda en sentit antihorari, serà positiva, negativa o zero? És conservatiu el camp?
- Quin seria el flux a través d'un cilindre finit centrat a l'eix OZ orientat amb la normal exterior?
- El flux a través d'un semipla $x = c < 0$ amb $y > 0$ orientat amb el vector normal $\vec{u} = (1, 0, 0)$ té signe positiu, negatiu o val zero?

Solució:

- Com que el camp $\vec{F}$ és tangent a la circumferència seguint el sentit antihorari, $\langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ és sempre positiu i, per tant, la circulació serà positiva. Com que hem vist que la circulació al llarg d'una corba tancada és no nul·la, el camp no és conservatiu.

- b) Al ser $\vec{F}$ tangent a la superfície, serà perpendicular al vector normal, per tant $\langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 0$ i el flux és nul.
- c) Amb $x < 0$ i $y > 0$ ens situaríem al segon quadrant de la imatge, on la component normal del camp $\vec{F}$ sempre té una contribució (que augmenta quan y creix) en el sentit $(-1, 0, 0)$. Per tant, si considerem el vector normal $\vec{u} = (1, 0, 0)$ el flux serà negatiu ja que $\langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle < 0$ a tot punt del semipla.

8. (1 punt) Decidiu si les següents afirmacions són certes o falses i justifiqueu el perquè. **Només es considerarà correcta la resposta si la justificació és correcta.**

- a) Si un camp vectorial $\vec{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$ definit a tot arreu a $\mathbb{R}^3$ compleix que $\text{div} \vec{F} = 0$ a tot $\mathbb{R}^3$, aleshores, per a qualsevol esfera, el flux que surt d'un hemisferi és igual al flux que entra a l'hemisferi oposat.
- b) Considereu el camp $\vec{F}(x, y, z) = (x + z \sin y, y + z \cos x, (x + y) \sin(x + y) + z)$. Aleshores, el flux d'aquest camp que surt a través de qualsevol superfície que tanqui un volum és exactament igual al volum que tanca aquesta superfície.

Solució:

- a) Certa. La afirmació que “el flux que surt d'un hemisferi és igual al flux que entra a l'hemisferi oposat” és equivalent a l'afirmació que “el flux que surt de l'esfera és igual a zero”. Com que $\text{div} \vec{F} = 0$ a tot arreu, això és cert pel teorema de la divergència.
- b) Falsa. $\text{div} \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$ i si W és el volum que tanca la superfície $S = \partial W$ i apliquem el teorema de Gauss:

$$\oint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_W \text{div} \vec{F} dV = \iiint_W 3 dV = 3 \text{Vol}(W)$$

9. (1.5 punts) Donat el camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z \sin^3 y - 2y, 6x + e^{y^2}, xyz^3)$ i la superfície

$$S_\alpha = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - c)^\alpha = R^2, z \geq c\}$$

amb $\alpha > 1$ (orientada amb la normal exterior), demostreu que el flux de $\text{rot} \vec{F}$ a través de S_α no depèn de α i calculeu-ne el valor quan $c = 0$.

Solució: Si apliquem el teorema de Gauss a la superfície tancada formada per S_α i el disc $D = \{z = c, x^2 + y^2 \leq R^2\}$:

$$\oint_{\partial W^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_\alpha^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \int_{D^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_V \text{div}(\text{rot} \vec{F}) dV = 0$$

on apliquem que la divergència del rotacional és idènticament zero ja que les funcions són de classe $\mathcal{C}^2$ (ho podeu calcular). Per tant, tenim que

$$\int_{S_\alpha^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_{D^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

Com que el flux sobre el disc no depèn d' α , demostrem que el flux a través de S_α és independent d'aquest valor.

Per trobar el valor del flux quan $c = 0$, hem de calcular el flux de $\text{rot} \vec{F}$ a través del disc D amb la normal apuntant a l'exterior, que és $(0, 0, -1)$. Per tant, només ens cal calcular la component z de $\text{rot} \vec{F}$: $Q_x - P_y = 6 - 3z \sin^2 y \cos y + 2$ i avaluar-la quan $z = 0$ per integrar-la:

$$\int_{D^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_D -8 dx dy = -8 A(D) = -8\pi R^2 \implies \int_{S_\alpha^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 8\pi R^2$$