

Nom i cognoms:

□

Equacions diferencials GETI (240131)

Examen – 28 d'octubre de 2024

Temps: 75 minuts

.....
Escriuiu el vostre nom i cognoms, en majúscules, a cada un dels fulls. Responeu de manera concisa però justificant els passos importants. La puntuació de cada problema serà en múltiples de 0.25 punts. No es pot dur calculadora. Es pot dur formulari: un full dinA-4, manuscrit, fet per vosaltres mateixos; no pot contenir problemes resolts. Les notes provisionals, resolució, data de revisió, etc, sortiran publicades a Atenea.

1. (0.5 punts) Doneu una parametrització d'una hèlix que comenci a l'origen, doni una volta respecte l'eix OZ , acabi al punt $(1, 0, 1)$ i es mogui a sobre del con d'equació $z^2 = x^2 + y^2$.

Solució: Una possible parametrització (n'hi ha infinites) és $(x, y, z) = \varphi(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta, f(\theta))$, amb $\theta \in [0, 2\pi]$ i $f(\theta)$ a determinar de manera que $\varphi(0) = (0, 0, 0)$ i $\varphi(2\pi) = (1, 0, 1)$. Observeu que $x^2 + y^2 = (f(\theta) \cos \theta)^2 + (f(\theta) \sin \theta)^2 = f(\theta)^2 = z^2$. De $\varphi(0) = (0, 0, 0)$ obtenim que $f(0) = 0$ i de $\varphi(2\pi) = (1, 0, 1)$ es dedueix que $f(2\pi) = 1$. Per tant, una possible parametrització és

$$\varphi(\theta) = \left(\frac{\theta}{2\pi} \cos(\theta), \frac{\theta}{2\pi} \sin(\theta), \frac{\theta}{2\pi} \right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

2. (1.5 punts) Sigui $F = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ en el seu domini de definició. Aleshores,

(a) Calculeu el seu rotacional.

(b) Calculeu $\oint_C \langle F, d\ell \rangle$, on C és la circumferència de centre l'origen i radi 1 situada al pla $\{z = 0\}$.

(c) És F conservatiu? Raoneu la resposta en relació al que heu obtingut als apartats (a) i (b) anteriors.

Solució:

- (a) Recordeu que el rotacional d'un camp del tipus $F = (P, Q, 0)$, és a dir al pla $\{z = 0\}$ és igual a $\text{rot } F = (0, 0, Q_x - P_y)$. En el nostre cas,

$$Q_x - P_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) - \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0.$$

- (b) Parametritzant C en polars: $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, tenim que

$$\begin{aligned} \oint_C \langle F, d\ell \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos \theta, \sin \theta), \gamma'(\theta) \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin \theta, \cos \theta), (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

- (c) F no és conservatiu atès que la seva circulació al llarg d'una corba tancada (vegeu (b)) no és 0. No és cap contradicció amb el fet que el seu rotacional sigui nul perquè el domini de F és $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eix } OZ\}$, que no és un domini simplement connex.

3. (1 punt) Enuncieu i demostreu el teorema de Newton-Leibniz (també anomenat del gradient).

Solució: Vegeu els apunts de l'assignatura.

4. (1 punt) Sigui S la superfície obtinguda al rotar la corba $C = \{(y-2)^2 + z^2 = 1, y \leq 2, x = 0\}$ respecte de l'eix OZ . Doneu una parametrització de S .

Solució: La corba C , la semicircumferència esquerra $(y-2)^2 + z^2 = 1$, amb $1 \leq y \leq 2$, es pot parametritzar - usant polars desplaçades - per $(y, z) = (f(t), g(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ per a $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Per tant, una parametrització de S és

$$x = f(t) \cos \theta = (2 + \cos t) \cos \theta, \quad y = f(t) \sin \theta = (2 + \cos t) \sin \theta, \quad z = g(t) = \sin t,$$

per a $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

5. (1 punt) Per a modelitzar un got de disseny es considera el cilindre $\{x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$ i es talla pel pla $y + z = 4$. Calculeu l'àrea (lateral) de la superfície que resta del cilindre al fer-ho.

Solució: Aquesta àrea correspon a la integral de la funció escalar $z = f(x, y) = 4 - y$ sobre la corba $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Així,

$$\text{Àrea lateral} = \oint_C f \, d\ell = \oint_C (4 - y) \, d\ell = 4 \oint_C d\ell - \oint_C y \, d\ell = 4 \text{long}(C) - 0 = 8\pi,$$

on hem usat que C és simètrica respecte a $\{y = 0\}$ (també es pot calcular usant la fórmula usual).

6. (1 punt) Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ una regió plana amb vora orientada positivament $\partial D^+ = C^+$. Aleshores, és certa la següent afirmació?

$$\text{Àrea}(D) = \frac{1}{2} \int_{C^+} (x - y) \, dx + (x + y) \, dy.$$

Justifiqueu la vostra resposta.

Solució: Si apliquem el teorema de Green amb $P(x, y) = x - y$ i $Q(x, y) = x + y$ tenim $Q_x = 1$, $P_y = -1$ i per tant

$$\int_{C^+} P \, dx + Q \, dy = \int_D Q_x - P_y \, dxdy = \int_D (1 + 1) \, dxdy = 2\text{Àrea}(D).$$

7. (1 punt) Sigui g el camp escalar $g(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^3$ i $G(x, y, z) = g(x, y, z) (x, y, z)$ un camp vectorial associat. Calculeu el flux de G a través de l'esfera E_R de centre l'origen i radi R orientada amb la normal apuntant cap al seu exterior.

Solució: Sabem que el vector normal de longitud 1, que apunta a l'exterior de l'esfera E_R en un punt qualsevol (x, y, z) d'ella és

$$N^+ = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) = \frac{1}{R} (x, y, z).$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\int_{E_R} \langle G, dS \rangle &= \int_{E_R} \langle G, N^+ \rangle dS = \int_{E_R} \langle g(x, y, z) (x, y, z), \frac{1}{R} (x, y, z) \rangle dS \\ &= \frac{1}{R} \int_{E_R} g(x, y, z) (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{1}{R} \int_{E_R} \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^4 dS \\ &= \frac{R^8}{2R} \int_{E_R} 1 dS = \frac{R^7}{2} \text{Àrea}(E_R) = 2\pi R^9,\end{aligned}$$

on hem usat que l'àrea d'una esfera de radi R és $4\pi R^2$.

Una altra opció és usar el teorema de Gauss. Així, si denotem per B_R la bola de centre l'origen i radi R (és a dir, $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$), aleshores

$$\int_{E_R} \langle G, dS \rangle = \int_{B_R} \text{div } G \, dx \, dy \, dz.$$

Calculem la divergència de $G = (xg, yg, zg)$. En efecte:

$$\begin{aligned}\text{div } G &= \left(g + x \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \left(g + y \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left(g + z \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= 3g + 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ &= \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^3 + 3 (x^3 + y^3 + z^3) = \frac{9}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^3.\end{aligned}$$

Així, en coordenades esfèriques,

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \text{div } G \, dx \, dy \, dz &= \frac{9}{2} \int_{B_R} (x^2 + y^2 + z^2)^3 \, dx \, dy \, dz = \frac{9}{2} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^6 r^2 \cos \phi \, d\theta \, d\phi \, dr \\ &= \frac{9}{2} 2\pi \left(\int_0^R r^8 \, dr \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \, d\phi \right) = 2\pi R^9.\end{aligned}$$

8. (1 punt) Calculeu el flux del camp vectorial $F(x, y, z) = \left(\frac{xz}{a^2}, \frac{yz}{b^2}, \frac{z^2}{c^2} \right)$ a través de l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, orientat amb la normal apuntant cap a enfora.

Solució: Si definim W com el volum determinat per S i apliquem el Teorema de Gauss s'obté que

$$\int_{S^+} \langle F, dS \rangle = \int_W \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_W \left(\frac{z}{a^2} + \frac{z}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \right) \, dx \, dy \, dz = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2} \right) \int_W z \, dx \, dy \, dz = 0,$$

doncs W és simètric respecte a $\{z = 0\}$.

9. (1 punt) Sigui F un camp vectorial definit a tot $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot } F = F$. Aleshores digueu si són certes o no les següents afirmacions i, en qualsevol cas, justifiqueu la vostra resposta.

- (i) Per a tota superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ i $\partial^+ S$ la seva vora, orientades de manera compatible, es té que

$$\int_{S^+} \langle F, dS \rangle = \int_{\partial S^+} \langle F, d\ell \rangle.$$

- (ii) Per a tota regió $W \subset \mathbb{R}^3$, si ∂W^+ és la seva vora orientada positivament, es verifica que $\int_{\partial W^+} \langle F, dS \rangle = 0$.

Solució: (i) La primera afirmació és certa. En efecte, si $F = \text{rot } F$ aleshores, aplicant el teorema de Stokes a S tenim que

$$\int_{S^+} \langle F, dS \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } F, dS \rangle = \int_{\partial^+ S} \langle F, d\ell \rangle.$$

(ii) La segona també ho és. N'hi ha prou a usar que $\text{div } F = \text{div } (\text{rot } F) = 0$, de manera que, aplicant Gauss, es dedueix que

$$\int_{\partial^+ W} \langle F, dS \rangle = \int_W \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_W 0 \, dx \, dy \, dz = 0.$$

10. (1 punt) Sigui C la corba intersecció entre la superfície $z = 2x^2 + y^2$ i el pla $y + 3z = 1$, recorreguda en sentit antihorari respecte al vector $u = (0, 1, 3)$. Calculeu

$$\oint_{C^+} \langle F, d\ell \rangle, \quad \text{on} \quad F(x, y, z) = (2y + xe^x, 5x - \sin y, 0).$$

Solució: Sigui S la superfície (en aquest cas un disc el·líptic) delimitat per la corba C , orientada amb el vector normal apuntant cap amunt. Aleshores, aplicant el teorema de Stokes es dedueix que

$$\oint_{C^+} \langle F, d\ell \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } F, dS \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } F, N^+ \rangle dS = \int_{S^+} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle dS = \frac{9}{\sqrt{10}} \text{Àrea}(S), \quad (1)$$

on hem usat que $\text{rot } (P(x, y), Q(x, y), 0) = (0, 0, Q_x - P_y)$. Per a calcular l'àrea de S busquem D , la seva projecció al pla $z = 0$. En efecte, igualant z a $z = 2x^2 + y^2$ i $y + 3z = 1$ i completant quadrats s'obté

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 = \frac{1-y}{3} &\Leftrightarrow 6x^2 + 3y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 3\left(y^2 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 + 3\left(y^2 + 2 \cdot \frac{1}{6}y + \frac{1}{6^2}\right) - \frac{1}{12} - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{12} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\text{Àrea}(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy,$$

on $D \subset \mathbb{R}^2$ és el disc el·líptic

$$\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2} \leq 1 \right\},$$

centrat al punt $(0, -1/6)$ i de semieixos $a = \frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{13}}{6}$ i $f(x, y) = \frac{1-y}{3}$. En el nostre cas $f_x = 0$, $f_y = -1/3$ i llavors

$$\text{Àrea}(S) = \frac{\sqrt{10}}{3} \int_D dx \, dy = \frac{\sqrt{10}}{3} \text{Àrea}(D) = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \pi \frac{13}{36\sqrt{2}}.$$

Substituint a (1) tenim que

$$\oint_{C^+} \langle F, d\ell \rangle = \frac{13}{12\sqrt{2}} \pi.$$