

Puntuacions

* **Test (t1, t2, t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.20 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

* **Problemes:** **p1** → 2.5 punts, **p2** → 4.5 punts.

t1 Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{a} + 2xy^2, 2x^2y - ay^3\right)$ al llarg del tros de la corba definida per $y = \cos x$, que va del punt $(0,1)$ fins al punt $(\pi/2,0)$.

.....

Solució: Escrivint $\vec{F} = (P, Q)$, tenim $Q_x = P_y$ i, com que P i Q són polinomis, el camp és conservatiu. Fàcilment trobem un potencial escalar: $f(x,y) = \frac{x^2}{2a} + x^2y^2 - \frac{ay^4}{4}$. Aplicant el teorema de Newton-Leibniz, la circulació és

$$I = f(\pi/2,0) - f(0,1) = \boxed{\frac{\pi^2}{8a} + \frac{a}{4}}$$

t2 Calculeu la massa de la superfície $S = \left\{(x,y,z) : z = a - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\right\}$, suposant una densitat proporcional a la distància a l'eix Z amb $k = 1/a$ com a constant de proporcionalitat.

.....

Solució: Hem d'integrar la funció densitat $\rho(x,y,z) = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ sobre la superfície S . Podem parametritzar S (un tronc cònic) com la gràfica de la funció $f(x,y) = a - \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el domini $D = \{(x,y) : (a-1)^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$ (una corona circular). Sabem que l'element de superfície és

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy.$$

Llavors la massa és

$$m(S) = \int_S \rho \, dS = \iint_D \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{2}}{a} \iint_{D^*} r \cdot r \, dr = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot 2\pi \int_{a-1}^a r^2 \, dr = \boxed{2\sqrt{2} \pi \left(a - 1 + \frac{1}{3a}\right)}$$

on hem fet el canvi a coordenades polars, obtenint $D^* = [a-1, a] \times [0, 2\pi]$ com a nou domini.

t3 Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x^2, xy)$ al llarg del quadrilàter de vèrtexs $(0, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(1, a, a)$, $(1, 0, 0)$, recorregut en aquest mateix ordre (suposant $a > 0$).
[Ind.: Us pot ajudar relacionar la superfície $z = xy$ amb el quadrilàter considerat.]

.....

Solució: El quadrilàter C considerat és la vora de la superfície S consistent en la gràfica $z = xy$, sobre el domini $(x,y) \in D = [0,1] \times [0,a]$ (ja que tant els vèrtexs com els 4 segments del quadrilàter formen part de S). Podem aplicar el teorema de Stokes. Parametritzant S per $\Phi(x,y) = (x,y,xy)$ amb domini D , tenim com a vector normal $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-y, -x, 1)$. Calcularem el flux de $\text{rot } \vec{F} = (x, -y, 2x - 2y)$ a través de S però, com que el quadrilàter ve orientat en sentit horari (si el mirem des de dalt), canviarem el signe del flux:

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= - \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \iint_D \langle (x, -y, 2x - 2y), (-y, -x, 1) \rangle \, dx \, dy \\ &= \iint_D (2y - 2x) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^a (2y - 2x) \, dy \, dx = \int_0^1 (a^2 - 2ax) \, dx = \boxed{a^2 - a} \end{aligned}$$

p1 Considerem a $\mathbb{R}^3$ la corba $C = \{(x, y, z) : z = 2x + y^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

- (a) Calculeu l'àrea de la superfície vertical compresa entre la corba C i la seva projecció sobre el pla $z = 0$.
- (b) Calculeu la massa de la corba C , si la densitat ve donada per $\rho(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + 4y^2(1 - x)^2}}$.
-

Solució:

- (a) Es tracta d'una tanca de base un quart de circumferència parametritzat per $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, i altura donada per la funció $h(x, y) = 2x + y^2$. L'àrea és

$$A = \int_{\sigma} h \, d\ell = \int_0^{\pi/2} h(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi/2} (2 \cos t + \sin^2 t) \cdot 1 \, dt = \boxed{2 + \frac{\pi}{4}}$$

- (b) Parametritzant C per $\delta(t) = (\cos t, \sin t, 2 \cos t + \sin^2 t)$ $0 \leq t \leq \pi/2$, tenim $\|\delta'(t)\| = \sqrt{1 + 4 \sin^2 t (1 - \cos t)^2}$. Llavors la massa és

$$m(C) = \int_C \rho \, d\ell = \int_0^{\pi/2} \rho(\delta(t)) \|\delta'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

p2 Considerem a $\mathbb{R}^3$ la corba C , parametritzada per $\sigma(t) = (0, 2a + t, a^2 - t^2)$, $-a \leq t \leq a$, i la superfície de revolució S obtinguda fent girar C al voltant de l'eix Z .

- (a) Calculeu:
- l'àrea A de la regió del pla YZ limitada per la corba C i l'eix Y ;
 - el volum V del sòlid comprès entre la superfície S i el pla XY .
- (b) Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y, y, x^2 y^2 - z)$ a través de la superfície S , orientada per la normal exterior.
- (c) Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de la superfície S , orientada per la normal exterior.
-

Solució:

- (a) Podem calcular l'àrea usant l'aplicació del teorema de Green, i el volum pel segon teorema de Pappus–Guldin.
- Per a l'àrea, integrem per exemple el camp vectorial $\frac{1}{2}(-z, y)$ al llarg de la vora de la regió considerada: la corba C (un tros de paràbola) que té la parametrització σ que recorre la vora en sentit horari, i un segment sobre l'eix Y sobre el qual la circulació és 0. Així,

$$A = -\frac{1}{2} \int_{\sigma} (-z) \, dy + y \, dz = -\frac{1}{2} \int_{-a}^a [-(a^2 - t^2) \cdot 1 + (2a + t)(-2t)] \, dt = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [t^2 + 4at + a^2] \, dt = \boxed{\frac{4}{3} a^3}$$

- Per al volum, apliquem el segon teorema de Pappus–Guldin, tenint en compte que, per simetria, el centre geomètric de C és algun punt de la forma $(0, 2a, \bar{z})$ i es troba a distància $2a$ de l'eix de gir:

$$V = 4\pi a \cdot A = \boxed{\frac{16}{3} \pi a^4}$$

- (b) Per tenir una superfície tancada, afegim a S una corona circular sobre el pla XY com a tapa inferior: $T = \{(x, y, z) : z = 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9a^2\}$, i d'aquesta manera la unió $S \cup T$ és la frontera del sòlid considerat a l'apartat (a). Com que la divergència de $\vec{F}$ és constant, $\text{div } \vec{F} = 2 + 1 - 1 \equiv 2$, pel teorema de Gauss tenim:

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 2V - \int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

Com que la normal exterior de la tapa T , respecte el sòlid, ve donada per $\vec{N}_T = (0, 0, -1)$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \int_T \langle \vec{F}, \vec{N}_T \rangle \, dS = \int_T (-x^2 y^2) \, dS = - \iint_{D^*} (r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= - \int_a^{3a} r^5 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta = -\frac{(3^6 - 1)a^6}{6} \cdot \frac{2\pi}{8} = -\frac{91}{3} \pi a^6, \end{aligned}$$

on hem usat que $z = 0$ sobre T , després hem fet el canvi a polars obtenint $D^* = [a, 3a] \times [0, 2\pi]$ com a nou domini i, finalment, hem usat que $\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\theta)$. Per tant,

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 2V + \frac{91}{3} \pi a^6 = \boxed{\frac{32}{3} \pi a^4 + \frac{91}{3} \pi a^6}$$

- (c) Apliquem el teorema de Stokes. La vora de S està formada per dues circumferències: C_1 de radi $3a$, i C_2 de radi a . Les orientacions compatibles són l'antihorària per a C_1 i l'horària per a C_2 . De manera genèrica, calculem la circulació de $\vec{F}$ al llarg d'una circumferència de radi R recorreguda en sentit antihorari. Parametritzant-la per $\delta(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tenim:

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{\delta} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\delta(t)), \delta'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (2R \cos t - R \sin t, R \sin t, *), (-R \sin t, R \cos t, 0) \rangle dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi R^2 \end{aligned}$$

(els altres termes que resulten de fer el producte escalar tenen integral 0). Així obtenim:

$$\int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = I_{3a} - I_a = \boxed{8\pi a^2}$$

Alternativament, podem calcular el camp $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ i aplicar el teorema de Gauss com a l'apartat (b), usant en aquest cas que $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) \equiv 0$.
