

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 3 Novembre 2023

Temps: 1h 15min

Puntuacions

- * **Test (t1 – t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes –0.20 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Problemes:** **p1** → 3 punts, **p2** → 3 punts.

Nota màxima: **9 punts**

p1

Segui S la superfície obtinguda fent girar la corba $\{(x, y, z) : (x - 2)^2 + z^2 = 1, y = 0, x \geq 2, z \geq 0\}$ al voltant de l'eix Z . Suposem S orientada pel vector normal que té la tercera component positiva. Considerem també el camp vectorial $\vec{F} = \left(\frac{\alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 4z^2 \right)$.

- (a) Trobeu els valors del paràmetre α per als quals el camp $\vec{F}$ és irrotacional. Per aquests valors de α , quina és la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la vora ∂S , orientada de manera compatible amb l'orientació de S ? [Justifiqueu la resposta.]
- (b) La vora ∂S està formada per dues circumferències C_1 i C_2 , de radis 3 i 2 respectivament. Doneu parametritzacions de C_1 i C_2 , indicant si són compatibles amb l'orientació de ∂S considerada a l'apartat (a).
- (c) Calculeu, per a qualsevol valor de α , la circulació de $\vec{F}$ al llarg de C_1 i C_2 orientades com a l'apartat (a). És conservatiu el camp $\vec{F}$ per algun valor de α ? Hi ha alguna contradicció amb el resultat de l'apartat (a)? [Justifiqueu la resposta.]

Solució:

- (a) Calculant el rotacional, $\text{rot } \vec{F} = \left(0, 0, \frac{(1 + \alpha)(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$, deduïm que el $\vec{F}$ és irrotacional només quan $\alpha = -1$.

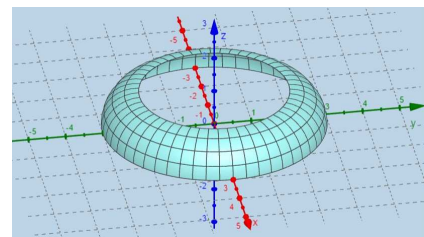
Per aquest valor de α , la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la vora ∂S és 0 pel teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 0.$$

Notem que hem pogut aplicar el teorema de Stokes ja que el camp $\vec{F}$ és definit a tota la superfície S .

- (b) Les orientacions de la vora compatibles amb l'orientació de S (una porció de tor) són en sentit antihorari per a la circumferència C_1 , i en sentit horari per a C_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (3 \cos t, 3 \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \sigma_2(t) &= (2 \cos t, -2 \sin t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$



- (c) Apliquem la definició de circulació:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \left(\frac{1}{9} 3\alpha \sin t, \frac{1}{9} 3 \cos t, 0 \right), (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (-\alpha \sin^2 t + \cos^2 t) dt = (1 - \alpha)\pi, \\ \oint_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \left(-\frac{1}{4} 2\alpha \sin t, \frac{1}{4} 2 \cos t, 4 \right), (-2 \sin t, -2 \cos t, 0) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (\alpha \sin^2 t - \cos^2 t) dt = (\alpha - 1)\pi, \end{aligned}$$

Perquè el camp $\vec{F}$ sigui conservatiu, una condició necessària és que sigui irrotacional, i a l'apartat (a) hem vist que això només passa quan $\alpha = -1$. Però en aquest cas les circulacions al llarg de C_1 i C_2 no són 0, i per tant el camp no és conservatiu per a cap valor de α . No hi ha cap contradicció amb l'apartat (a), ja que el fet que el camp sigui irrotacional és una condició necessària però no suficient perquè sigui conservatiu. Notem que C_1 i C_2 envolten cadascuna l'eix Z , sobre el qual el camp $\vec{F}$ no està definit.

p2 Considerem a $\mathbb{R}^3$ la funció $g(x, y, z) = (x + z^2) \sin(x^2 + y^2)$, i el camp vectorial $\vec{F} = (-y, x, xy) + \nabla g(x, y, z)$.

- (a) Calculeu la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la corba $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, z = 1\}$, orientada al punt $(0, 1, 1)$ pel vector tangent $(1, 0, 0)$.
- (b) Calculeu el flux de $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$, orientada al punt $(0, 1, 1/2)$ pel vector normal $(0, 1, 0)$.

.....

Solució:

- (a) El camp $\vec{F}$ és la suma dels camps $\vec{F}_0 = (-y, x, xy)$ i ∇g als quals aplicarem, respectivament, la definició de circulació i el teorema de Newton–Leibniz. Parametritzem la corba (una semicircumferència): $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $0 \leq t \leq \pi$ (sentit antihorari). Com que al punt $\sigma(\pi/2) = (0, 1, 1)$ tenim el vector tangent $\sigma'(\pi/2) = (-1, 0, 0)$, l'orientació no és la correcta i canviem el signe per tenir el sentit horari:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= - \int_0^\pi \langle \vec{F}_0(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt + g(\sigma(0)) - g(\sigma(\pi)) \\ &= - \int_0^\pi \langle (-\sin t, \cos t, *), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt + g(1, 0, 1) - g(-1, 0, 1) = \boxed{-\pi + 2 \sin 1} \end{aligned}$$

- (b) Aplicarem la definició de flux. Com que $\text{rot}(\nabla g) = \vec{0}$, resulta que $\text{rot}(\nabla F) = \text{rot}(\nabla F_0) = (x, -y, 2)$. La superfície és un semicilindre, que podem parametritzar per $\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$, amb domini $D = [0, \pi] \times [0, 1]$. Tenim el vector normal $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, compatible amb l'orientació donada (la normal exterior). Llavors,

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_D \langle (\text{rot } \vec{F}_0)(\Phi(\theta, z)), \Phi_\theta \wedge \Phi_z \rangle d\theta dz = \iint_D \langle (\cos \theta, -\sin \theta, 2), (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz \\ &= \int_0^\pi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta = \boxed{0} \end{aligned}$$

També podem aplicar el teorema de Stokes, considerant que la vora ∂S està formada per dues semicircumferències i dos segments. Una de les semicircumferències és la de l'apartat (a) que cal recórrer també en sentit horari, i la circulació de $\vec{F}$ és, com hem vist, $I_1 = -\pi + 2 \sin 1$, i l'altra semicircumferència és anàloga però sobre el pla $z = 0$ (no afecta els càlculs) i en sentit antihorari, amb circulació $I_2 = -I_1$. Les circulacions de $\vec{F}$ sobre els segments ascendent i descendent són, respectivament, $I_3 = \sin 1$ i $I_4 = -\sin 1$, i per tant la suma total és també 0.

t1 Calculeu la circulació $\oint_C 3x^2 y dx + (y - 3) dy$, on C és el rectangle de vèrtexs $(0, 1)$, $(0, 5)$, $(\alpha, 1)$ i $(\alpha, 5)$, recorregut de manera que el segment que es troba sobre l'eix Y es recorri en sentit ascendent.

.....

Solució: Podem aplicar el teorema de Green sobre el rectangle ple D que té C com a vora: $D = I_\alpha \times [1, 5]$, amb:

- * $I_\alpha = [0, \alpha]$ si $\alpha > 0$, i en aquest cas recorrem C en sentit horari;
- * $I_\alpha = [\alpha, 0]$ si $\alpha < 0$, i en aquest cas recorrem C en sentit antihorari
- * (no hi ha rectangle si $\alpha = 0$).

Així, hem de canviar el signe si $\alpha > 0$, i mantenir-lo si $\alpha < 0$. Considerant el camp vectorial $\vec{F} = (P, Q) = (3x^2 y, y - 3)$, tenim $Q_x - P_y = -3x^2$ i resulta:

$$\oint_C 3x^2 y dx + (y - 3) dy = \mp \iint_D (-3x^2) dx dy = \pm(5 - 1) \int_{I_\alpha} 3x^2 dx = \boxed{4\alpha^3}$$

t2 Trobeu la tercera coordenada del centre de masses $(0, 0, \bar{z})$ del con $S = \{(x, y, z) : z = a\sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq a\}$, suposant que la densitat ve donada per $\rho(x, y, z) = z$.

Solució: La coordenada $\bar{z}$ és el quocient de la integral $\int_S z \rho \, dS = \int_S z^2 \, dS$ i la massa $\int_S \rho \, dS = \int_S z \, dS$. Com que són molt similars, calculem les dues integrals alhora. Com que tenim la gràfica de $f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$, l'element de superfície és

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + a^2} \, dx \, dy.$$

I el domini de f és $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Aleshores,

$$I_k = \int_S z^k \, dS = \iint_D \left(a\sqrt{x^2 + y^2}\right)^k \cdot \sqrt{1 + a^2} \, dx \, dy = a^k \sqrt{1 + a^2} \iint_{D^*} r^k \cdot r \, dr \, d\theta = a^k \sqrt{1 + a^2} \frac{2\pi}{k+2},$$

on hem passat a polars, amb nou domini $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Així, la coordenada del centre de masses és $\bar{z} = \frac{I_2}{I_1} = \boxed{\frac{3a}{4}}$

t3 Calculeu el flux del camp $\vec{F} = (x^2, y^2, az^3)$ a través de la semiesfera definida per $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, orientada per la normal exterior.

Solució: Afegint com a tapa el cercle $T = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, tenim una superfície tancada $S \cup T = \partial W$, on W és la semiesfera sòlida, i podem aplicar el teorema de Gauss. Notem que el flux a través de T és 0, ja que $\vec{F}(x, y, 0) = (x^2, y^2, 0)$ i el seu producte escalar amb $\vec{N}_T = (0, 0, -1)$ és 0. Així, només hem de calcular la integral triple de la funció $\text{div } \vec{F} = 2x + 2y + 3az^2$ sobre W :

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iiint_W (2x + 2y + 3az^2) \, dx \, dy \, dz = 3a \iiint_W z^2 \, dx \, dy \, dz = 3a \iiint_{W^*} (r \sin \varphi)^2 \cdot r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 3a \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r^4 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 6\pi a \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2\pi a}{5}} \end{aligned}$$

on hem aplicat els passos següents:

- hem usat que les integrals de $2x$ i $2y$ sobre W són 0 per simetria;
- hem passat a coordenades esfèriques $x = r \cos \varphi \cos \theta$, $y = r \cos \varphi \sin \theta$, $z = r \sin \varphi$, obtenint per a (r, θ, φ) el domini $W^* = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$;
- hem posat la nova integral com a producte de 3 integrals simples, una de les quals és directament la longitud de l'interval ja que la funció a integrar no depèn de θ .

També és factible parametritzar la semiesfera i aplicar directament la definició de flux.