

Nom i cognoms
(en MAJÚSCULES !)

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(P₁)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 12 Abr 2023

Temps: 1h 15min

Puntuacions

* **Problemes:** **p1** → 3 punts, **p2** → 4 punts.

* **Test (t1, t2, t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

p1 Sigui C la corba de $\mathbb{R}^3$ obtinguda com a intersecció del semiparaboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, $y \geq 0$, amb el pla $z = 4 - 2x$, orientada de manera que la coordenada z creixi.

- (a) Doneu una parametrització de C , indicant l'interval on està definida i si és compatible amb l'orientació.
- (b) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (y, 0, 0)$ al llarg de C , amb l'orientació indicada.
- (c) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{G} = (yz e^{xy}, xz e^{xy}, e^{xy})$ al llarg de C , amb l'orientació indicada.
- (d) Calculeu l'àrea de la superfície vertical compresa entre la corba C i la seva projecció sobre el pla XY .
-

Solució:

- (a) Combinant les dues equacions, tenim $4 - 2x = 4 - x^2 - y^2$, és a dir $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, amb $y \geq 0$. Llavors una parametrització és

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 - 2 \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

o també, tenint en compte que l'equació $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ s'expressa en cilíndriques per $r = 2 \cos \theta$,

$$\delta(\theta) = (2 \cos^2 \theta, 2 \cos \theta \sin \theta, 4 \sin^2 \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

En ambós casos, la coordenada z és creixent respecte el paràmetre.

- (b) Aplicant la definició, per exemple amb la primera parametrització considerada,

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^\pi \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_0^\pi (-\sin^2 t) dt = -\frac{\pi}{2}.$$

- (c) Aquest camp vectorial és conservatiu, i té com a potencial escalar $g(x, y, z) = z e^{xy}$. Com que la corba va des del punt $(2, 0, 0)$ fins al punt $(0, 0, 4)$, aplicant el teorema de Newton-Leibniz obtenim

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = g(0, 0, 4) - g(2, 0, 0) = 4.$$

- (d) La projecció és la semicircumferència $\widehat{C}$ parametritzada per $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$. Sobre $\widehat{C}$, integrem la funció $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ o bé $h(x, y) = 4 - 2x$ (que coincideixen sobre $\widehat{C}$):

$$\text{Area} = \int_{\widehat{C}} g d\ell = \int_0^\pi g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^\pi (2 - 2 \cos t) \cdot 1 dt = 2\pi.$$

p2 Considerem el camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, 2xz + 5y, -xyz^2)$.

- (a) Calculeu el flux de $\vec{F}$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 9, 1 \leq y \leq 2\}$ orientada per la normal exterior, aplicant un teorema integral.
- (b) Calculeu la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la corba $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 9, y = 2\}$ orientada al punt $(3, 2, 0)$ pel vector tangent $\vec{T} = (0, 0, 1)$, aplicant un teorema integral.
-

Solució:

- (a) Afegint tapes $T_1 = \{(x, y, z) : y = 1, x^2 + z^2 \leq 9\}$ i $T_2 = \{(x, y, z) : y = 2, x^2 + z^2 \leq 9\}$, resulta que $S \cup T_1 \cup T_2 = \partial W$ per al sòlid $W = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 9, 1 \leq y \leq 2\}$. Orientem T_1 i T_2 per la normal exterior a W , és a dir $\vec{N}_1 = (0, -1, 0)$ i $\vec{N}_2 = (0, 1, 0)$ respectivament. Com que $\text{div } \vec{F} \equiv 5$, aplicant el teorema de Gauss resulta:

$$\int_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 5 \text{vol}(W) - \int_{T_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_{T_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Calculem el volum, i els fluxos per les tapes:

$$\text{vol}(W) = 9\pi \cdot 1 = 9\pi,$$

$$\int_{T_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{T_1} (\vec{F} \cdot \vec{N}_1) dS = - \int_{T_1} (2xz + 5y) dS = - \int_{T_1} (2xz + 5) dS = -5 \text{Area}(T_1) = -45\pi,$$

$$\int_{T_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{T_2} (\vec{F} \cdot \vec{N}_2) dS = \int_{T_2} (2xz + 5y) dS = \int_{T_2} (2xz + 10) dS = 10 \text{Area}(T_2) = 90\pi,$$

on hem usat que $y = 1$ o $y = 2$ sobre la tapa corresponent, i que la integral de $2xz$ és 0 per simetria en ambdós casos. Per tant,

$$\int_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 5 \cdot 9\pi - (-45\pi) - 90\pi = 0.$$

- (b) Aplicarem el teorema de Stokes, tenint en compte que $C = \partial T_2$ per al cercle T_2 considerat a l'apartat (a). Com que l'orientació de C correspon al sentit horari mirant des del semieix Y positiu, en aquest cas l'orientació T_2^+ vindrà donada pel vector normal $\vec{N} = (0, -1, 0)$. Usant que $\text{rot } \vec{F} = (*, x^2y + yz^2, *)$ (només ens interessa la segona component), obtenim:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{T_2^+} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{T_2} (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N}) dS = - \int_{T_2} (x^2y + yz^2) dS = -2 \int_{T_2} (x^2 + z^2) dS \\ &= -2 \iint_D (x^2 + z^2) dx dz = -2 \cdot 2\pi \int_0^3 r^2 \cdot r dr = -81\pi, \end{aligned}$$

on hem usat que $y = 2$ sobre T_2 , i després hem parametritzat T_2 per $\varphi(x, z) = (x, 2, z)$ amb domini $D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 9\}$ i $\|\varphi_x \wedge \varphi_z\| = 1$, i finalment hem passat a coordenades polars.

t1 Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = \left(\frac{xy^2}{2}, \frac{x^3}{3}\right)$ al llarg de la circumferència de radi 1 centrada a l'origen, recorreguda en sentit antihorari.

- *(a) $\pi/4$ (b) $\pi/8$ (c) 0 (d) 2π (e) cap de les anteriors
-

Solució: La circumferència és la frontera del domini $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, orientada de manera compatible. Per tant, podem aplicar el teorema de Green. Escrivint $\vec{F} = (P, Q)$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D (x^2 - xy) dx dy = \iint_D x^2 dx dy \\ &= \iint_{D^*} r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

on hem usat que la integral de xy és 0 per simetria, i després hem fet el canvi a polars, amb $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ com a nou domini.

t2 Calculeu la massa de la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, x, y, \geq 0, 0 \leq z \leq 5\}$, si la densitat ve donada per $\rho(x, y) = (x + y)^2$.

- (a) $20\pi + 40$ (b) 20π (c) $20\pi - 40$ (d) 40 (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Parametritzem S (un quart de cilindre) per $\Phi(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$ amb domini $D = [0, \pi/2] \times [0, 5]$ i $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = 2$, i obtenim:

$$m(S) = \int_S \rho dS = \int_S (x^2 + y^2 + 2xy) dS = \iint_D (4 + 8 \cos \theta \sin \theta) \cdot 2 d\theta dz = 40 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin 2\theta) d\theta = 20\pi + 40,$$

on hem usat que $x^2 + y^2 = 4$ sobre S .

t3 Fent girar la circumferència $C = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2\}$ ($R > r > 0$) al voltant de l'eix Z obtenim com a superfície de revolució un tor. Sigui S la part del tor amb $x, y \geq 0$, orientada per la normal exterior. Donat el camp $\vec{F} = (z, y, -x)$, calculeu el flux del seu rotacional a través de S .

- (a) $-2\pi(R + r)^2$ (b) 0 (c) $2\pi r^2$ (d) $\pi(R - r)^2$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució:

Apliquem el teorema de Stokes:

$$\int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle + \int_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle,$$

on C_1 i C_2 són circumferències, que parametritzem per $\sigma_1(t) = (R + r \cos t, 0, r \sin t)$ i $\sigma_2(t) = (0, R + r \cos t, r \sin t)$ respectivament, $0 \leq t \leq 2\pi$. La segona té l'orientació compatible amb la de S , però la primera té l'orientació contrària. Calculem:

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= - \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt = - \int_0^{2\pi} \langle (r \sin t, 0, -(R + r \cos t)), (-r \sin t, 0, r \cos t) \rangle dt = 2\pi r^2, \\ \int_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (r \sin t, R + r \cos t, 0), (0, -r \sin t, r \cos t) \rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Per tant, el flux que es demana és $2\pi r^2$.
