

Nom i cognoms  
(en MAJÚSCULES !)

Columna  
(A,B,C,...)

Fila  
(1,2,3,...)

(P<sub>1</sub>)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 28 Oct 2022

Temps: 1h 15min

Puntuacions

\* **Problemes:** **p1** → 3 punts, **p2** → 3 punts.

\* **Test (t1, t2, t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

Nota màxima: **9 punts**

**p1** Sigui  $W$  el sòlid de revolució obtingut en girar al voltant de l'eix  $Z$  la regió el·líptica

$$T = \left\{ (x, y, z) : y = 0, \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

(a) Calculeu el volum de  $W$ .

(b) Sigui  $S$  la part de la frontera de  $W$  limitada per  $x, y \geq 0$ , és a dir,

$$S = \partial W \cap \{(x, y, z) : x, y \geq 0\},$$

orientada per la normal exterior a  $W$ . Calculeu el flux del camp vectorial  $\vec{F} = (z+2, 1, z)$  a través de  $S$ .

Solució:

(a) Apliquem el primer teorema de Guldin, tenint en compte que l'àrea de  $T$  és  $\pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$  i que la distància del centre geomètric de  $S$  a l'eix de gir és  $\bar{x}_T = 5$ . Obtenim:  $\text{vol}(W) = \text{Area}(T) \cdot 2\pi\bar{x}_T = \boxed{60\pi^2}$

(b) Aplicarem el teorema de Gauss al sòlid  $\widehat{W} = W \cap \{(x, y, z) : x, y \geq 0\}$  (la quarta part de  $W$ ). La frontera de  $\widehat{W}$  és la superfície  $S$  més dues tapes, una de les quals és la pròpia regió  $T$  i l'altra, d'identiques característiques, és

$$T_2 = \left\{ (x, y, z) : x = 0, \frac{(y-5)^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

El vector normal exterior a  $W$  per a la tapa  $T$  és  $\vec{N}_1 = (0, -1, 0)$ , i per a la tapa  $T_2$  és  $\vec{N}_2 = (-1, 0, 0)$ . Tenim

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_{\widehat{W}} \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz - \int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \int_{T_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

Com que  $\text{div } \vec{F} \equiv 1$ , la integral triple és  $\text{vol}(\widehat{W}) = \frac{1}{4} \text{vol}(W) = 15\pi^2$ . Calculem els fluxos a través de  $T$  i  $T_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \int_T \langle \vec{F}, \vec{N}_1 \rangle \, dS = \int_T (-1) \, dS = -\text{Area}(T) = -6\pi, \\ \int_{T_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \int_{T_2} \langle \vec{F}, \vec{N}_2 \rangle \, dS = \int_{T_2} (-z-2) \, dS = -2 \text{Area}(T_2) = -12\pi \end{aligned}$$

on, en el segon cas, hem usat que  $\int_{T_2} z \, dS = 0$  per simetria de la funció i el domini respecte  $z = 0$ . Per tant,

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 15\pi^2 - (-6\pi) - (-12\pi) = \boxed{15\pi^2 + 18\pi}$$

---

**p2** Considereu el camp vectorial  $\vec{F}(x, y) = (x^3 + \alpha y^2, x^4)$ , essent  $\alpha$  un paràmetre, i el domini pla  $D = [0, 2] \times [0, 1]$ .

- (a) Calculeu la circulació de  $\vec{F}$  al llarg de la vora  $\partial D^+$ , orientada de manera compatible amb  $D$ .  
(b) És conservatiu el camp vectorial  $\vec{F}$  per algun valor del paràmetre  $\alpha$ ? [Justifiqueu la resposta.]

.....  
**Solució:**

- (a) Escrivint  $\vec{F} = (P, Q)$  tenim  $Q_x - P_y = 4x^3 - 2\alpha y$ . Aplicant el teorema de Green,

$$\int_{\partial D^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 (4x^3 - 2\alpha y) dy dx = \int_0^2 (4x^3 - \alpha) dx = \boxed{16 - 2\alpha}$$

- (b) Perquè el camp  $\vec{F}$  sigui conservatiu és necessari que sigui irrotacional:  $Q_x - P_y \equiv 0$ , però aquesta identitat no es compleix per a cap valor de  $\alpha$ . Per tant, no és conservatiu per a cap valor de  $\alpha$ .

---

**t1** Calculeu la circulació del camp vectorial  $\vec{F} = (y^2, x, y + z)$  al llarg de la corba definida com a intersecció de les superfícies  $x^2 + y^2 = 2$  i  $x - y - z = 0$ , orientada en sentit antihorari si la mirem des de dalt.

- (a)  $-1$       (b)  $1$       (c)  $2\pi$       \*(d)  $0$       (e) cap de les anteriors

.....  
**Solució:** Podem parametritzar la corba per  $\sigma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , amb vector tangent  $\sigma'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \cos t)$ . Avaluant  $\vec{F}$  sobre la corba, tenim  $\vec{F}(\sigma(t)) = (2 \sin^2 t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t)$ . Fent el producte escalar i integrant, obtenim:

$$\int_{\sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} [-2\sqrt{2} \sin^3 t - 2 \sin t \cdot \cos t] dt = \boxed{0}$$

Alternativament, podem calcular aquesta circulació aplicant el teorema de Stokes.

---

**t2** Calculeu el moment d'inèrcia respecte l'eix  $Z$  del con definit per  $x^2 + y^2 = (Rz)^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  (de radi  $R$  i altura 1), suposant una densitat  $\rho$  constant.

- (a)  $2\pi\rho R^3$       (b)  $4\pi\rho R^2\sqrt{1+R^2}$       \*(c)  $\frac{\pi}{2}\rho R^3\sqrt{1+R^2}$       (d)  $\pi\rho R^2$   
(e) cap de les anteriors

.....  
**Solució:** Podem parametritzar el con per  $\Phi(\theta, z) = (Rz \cos \theta, Rz \sin \theta, z)$ , amb  $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ , i tenim  $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = R\sqrt{1+R^2}z$ . Aleshores,

$$I_Z = \rho \int_S (x^2 + y^2) dS = \rho \iint_D (Rz)^2 \cdot R\sqrt{1+R^2} z d\theta dz = 2\pi\rho R^3\sqrt{1+R^2} \int_0^1 z^3 dz = \boxed{\frac{\pi}{2}\rho R^3\sqrt{1+R^2}}$$

---

**t3**

Considerem a  $\mathbb{R}^3$  el camp vectorial  $\vec{F} = (-y - yz^2 \sin(xy), x - xz^2 \sin(xy), -x^2 - y^2 + 2z \cos(xy))$ . Sabent que  $\text{rot } \vec{F} = (-2y, 2x, 2)$ , calculeu la circulació de  $\vec{F}$  al llarg de la corba  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = e^{xy}\}$ , recorreguda en sentit antihorari mirada des de dalt.

- (a)  $\pi/2$       (b)  $-\pi$       (c)  $-\pi/3$       \*(d)  $2\pi$       (e) cap de les anteriors

**Solució:** Aplicarem el teorema de Stokes, i ho veurem de dues maneres diferents:

- Considerant la superfície cilíndrica  $S = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq e^{xy}\}$ , orientada per la normal exterior:  $\vec{N} = (x, y, 0)$ . La seva vora és  $\partial S = C_0 \cup C$ , amb  $C_0 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ . Orientant  $\partial S$  de manera compatible, tenim (mirades des de dalt)  $C_0$  orientada en sentit antihorari ( $C_0^+$ ) i  $C$  orientada en sentit horari ( $C^-$ , al revés del que ens demanen). Pel teorema de Stokes,

$$\int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{C_0^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle - \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle.$$

Parametritzant  $C_0^+$  per  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , tenim

$$\int_{C_0^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t, -1), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt = 2\pi.$$

D'altra banda,

$$\int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle dS = 0,$$

ja que  $\text{rot } \vec{F} = (-2y, 2x, 2)$  i  $\vec{N} = (x, y, 0)$  són ortogonals. Per tant,

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{C_0^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle - \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 2\pi - 0 = \boxed{2\pi}.$$

- Considerant  $C$  com la vora de la superfície  $T = \{z = e^{xy}, x^2 + y^2 \leq 1\}$  (la tapa superior, no plana, del cilindre  $S$  considerat anteriorment), orientada cap amunt. Parametritzem  $T$  per  $\Phi(x, y) = (x, y, e^{xy})$ , amb domini  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ , i tenim  $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-y e^{xy}, x e^{xy}, 1)$ . Llavors, aplicant el teorema de Stokes,

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{T^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D \langle (\text{rot } \vec{F})(\Phi(x, y)), \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle dx dy = \int_D 2(y^2 - x^2) e^{xy} + 2 = 2 \text{Area}(D) = 2\pi,$$

ja que la integral de  $(y^2 - x^2) e^{xy}$  és 0 per simetria respecte l'eix  $y = x$ .