

Nom i cognoms (en MAJÚSCULES!):

Columna
(A,B,C,...)

Fila
(1,2,3,...)

(P₁)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 4 Abr 2022

Temps: 1 h 15 min

Puntuacions:

* **Test (t1, t2, t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

* **Problemes:** p1 → 2.5 punts, p2 → 2.5 punts.

Nota màxima: 8 punts

p1

Una partícula es mou sobre el pla, des del punt $(0, 1)$ fins al punt $(0, 2)$ fent el recorregut següent: primer des de $(0, 1)$ fins a $(1, 0)$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ (en sentit horari), després pel segment de $(1, 0)$ a $(2, 0)$, i finalment des de $(2, 0)$ fins a $(0, 2)$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 4$ (en sentit antihorari). Calculeu el treball (circulació) efectuat per la força $\vec{F} = (x^3 - 3x^2y - y^3, y^2)$ sobre aquesta partícula.

Solució:

Afegint al recorregut C indicat el segment C_2 de $(0, 2)$ a $(0, 1)$ (orientat en sentit descendent), tenim una corba tancada (regular a trossos), que és la vora $C \cup C_2 = \partial D$ del domini següent (un quadrant de corona circular):

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\},$$

recorreguda en sentit antihorari. Respecte aquest domini, pel teorema de Green tenim:

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle + \int_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_D (Q_x - P_y) dx dy,$$

(amb el segment C_2 orientat de dalt a baix). Calculem:

$$\begin{aligned} \int_D (Q_x - P_y) dx dy &= \int_D (3x^2 + 3y^2) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_1^2 3r^2 \cdot r dr = \frac{45\pi}{8}, \\ \int_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= - \int_1^2 \langle \vec{F}(0, y), (0, 1) \rangle dy = - \int_1^2 y^2 dy = -\frac{7}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{i per tant } \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \boxed{\frac{45\pi}{8} + \frac{7}{3}}$$

p2

Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$, essent $\vec{F} = (yz^3, x^2z, xy^2)$, a través de la superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1, x \geq -1 \right\},$$

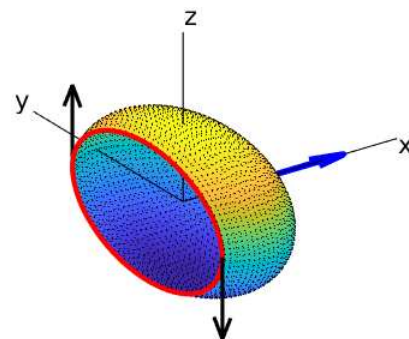
orientada al punt $(2, 0, 0)$ pel vector normal $\vec{N} = (1, 0, 0)$.

Solució:

La vora de S és l'el·lipse

$$\partial S = \left\{ (x, y, z) : \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = \frac{3}{4}, x = -1 \right\} = \left\{ (x, y, z) : \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1, x = -1 \right\}$$

i la podem parametritzar per $\sigma(t) = (-1, 3 \cos t, \sqrt{3} \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. L'orientació generada per aquesta parametrització és compatible amb la de S (vegeu la figura).



Aplicant el teorema de Stokes, tenim:

$$\begin{aligned}\int_{S^+} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle &= \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (*, \sqrt{3} \sin t, -9 \cos^2 t), (0, -3 \sin t, \sqrt{3} \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3\sqrt{3} \sin^2 t - 9\sqrt{3} \cos^3 t) dt = \boxed{-3\sqrt{3} \pi}\end{aligned}$$

També ho podem fer amb el teorema de Gauss, tenint en compte que el camp $\vec{G}$ és solenoidal: $\operatorname{div} \vec{G} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) \equiv 0$. Per tenir una superfície tancada afegim una tapa,

$$T = \left\{ (x, y, z) : x = -1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y, z) : x = -1, \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} \leq 1 \right\}$$

orientada per $\vec{N}_T = (-1, 0, 0)$. Usant que $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F} = (2xy - x^2, *, *)$, el flux a través de S amb l'orientació demanada és:

$$\int_{S^+} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = - \int_{T^+} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = - \int_T \langle \vec{G}, \vec{N}_T \rangle dS = \int_T (2xy - x^2) dS = \int_T (-2y - 1) dS = -\operatorname{Area}(T) = -3\sqrt{3} \pi,$$

on hem usat que $x = -1$ sobre T , i que la integral de $-2y$ és 0 per simetria.

t1

Considerem la corba $x^2 - y^2 = 5$, amb $\sqrt{5} \leq x \leq 3$, $y \geq 0$. Calculeu la circulació del camp $\vec{F}(x, y) = (y + \sin x, x + e^y)$ al llarg de C , orientada de manera que la coordenada y creixi.

- *(a) $5 - \cos 3 + \cos \sqrt{5} + e^2$ (b) $6 - \cos 3 + \cos \sqrt{5} + e^2$
 (c) $5 + \cos 3 - \cos \sqrt{5} - e^2$ (d) $6 + \cos 3 - \cos \sqrt{5} - e^2$
 (e) cap de les anteriors

Solució: El camp $\vec{F} = (P, Q)$, definit a tot $\mathbb{R}^2$, compleix la condició $P_y = Q_x$. Integrant P respecte x i Q respecte y , fàcilment trobem un potencial escalar, $f(x, y) = xy - \cos x + e^y$. Els punts inicial i final de la corba són $(\sqrt{5}, 0)$ i $(3, 2)$. Pel teorema de Newton-Leibniz,

$$\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = f(3, 2) - f(\sqrt{5}, 0) = \boxed{5 - \cos 3 + \cos \sqrt{5} + e^2}$$

t2

Considerem la corba del pla XZ donada per $z = 2 + x^2$, $x \in [-1, 1]$, i la fem girar al voltant de l'eix horitzontal X generant una superfície de revolució S . Suposant que la densitat superficial ve donada per $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$, calculeu la massa de la superfície S .

- (a) 4π (b) $\frac{20\pi}{3}$ (c) 10π *(d) $\frac{28\pi}{3}$ (e) cap de les anteriors

Solució: Una parametrització de S és:

$$\Phi(\theta, x) = (x, (2 + x^2) \cos \theta, (2 + x^2) \sin \theta), \quad (\theta, x) \in D = [0, 2\pi] \times [-1, 1].$$

Calculem $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_x\| = (2 + x^2)\sqrt{1 + 4x^2}$. Llavors

$$\operatorname{Massa}(S) = \int_S \rho dS = \int_D \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} (2 + x^2) \sqrt{1 + 4x^2} d\theta dx = 2\pi \int_{-1}^1 (2 + x^2) dx = \boxed{\frac{28\pi}{3}}$$

t3

Sigui $\vec{F}$ un camp vectorial definit a $\mathbb{R}^3$, que té divergència constant: $\operatorname{div} \vec{F} \equiv k$. Considerem la semiesfera $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$, i sigui β el flux de $\vec{F}$ a través de S_1 , orientada pel vector normal $\vec{N}_1 = (0, 0, 1)$ en el punt $(0, 0, 3)$. Considerem ara l'altra semiesfera $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \leq 0\}$. Quin és el flux de $\vec{F}$ a través de S_2 , si l'orientem pel vector normal $\vec{N}_2 = (0, 0, 1)$ en el punt $(0, 0, -3)$?

- (a) $36\pi k - \beta$ * (b) $\beta - 36\pi k$ (c) $\beta + 36\pi k$ (d) $-(\beta + 36\pi k)$ (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Les dues superfícies formen tota la frontera de l'esfera sòlida $S_1 \cup S_2 = \partial W$, amb

$$W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\},$$

que té volum $V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$. Orientant S_1 i S_2 per la normal exterior a W , pel teorema de Gauss tenim:

$$\beta + \int_{S_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = kV.$$

Però el flux que ens demanen és amb S_2 orientada per la normal interior al sòlid, és a dir

$$\int_{S_2^-} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \beta - kV = \boxed{\beta - 36\pi k}$$
