

Nom i cognoms:

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(P₁)

Puntuacions:

- * **Test (t1, t2, t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Problemes:** p1 → 2 punts, p2 → 3 punts.

Nota màxima: 8 punts

t1 Considereu la corba $y = |x|$ per $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ com una corba plana regular a trossos que representa un filferro. Supposeu que la densitat lineal del filferro és $\rho(x, y) = \cos y$. Calculeu la segona coordenada $\bar{y}$ del centre de masses del filferro.

- (a) $\sqrt{2}$ *(b) $\frac{\pi - 2}{2}$ (c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) cap de les anteriors
-

Solució: Parametritzem la corba com $\sigma(x) = (x, |x|)$ per a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, i tenim $d\ell = \sqrt{2} \, dx$, tant per $x \leq 0$ com per $x \geq 0$. Notem que $\rho = \cos y = \cos |x| = \cos x$. La massa total serà

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \sqrt{2} \, dx = 2\sqrt{2}.$$

I aleshores,

$$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x| \cos x \cdot \sqrt{2} \, dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \boxed{\frac{\pi - 2}{2}}$$

t2 Calculeu el moment d'inèrcia de la superfície $S = \{(x, y, z) : z = 1 - 2x, \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ respecte l'eix Z , suposant una densitat ρ constant.

- (a) $\frac{3\pi\sqrt{2}\rho}{5}$ (b) $4\pi\sqrt{5}\rho$ *(c) $\frac{\pi\sqrt{5}\rho}{2}$ (d) $\frac{\pi\sqrt{2}\rho}{4}$ (e) cap de les anteriors
-

Solució: Parametritzant S com la gràfica de $h(x, y) = 1 - 2x$, amb domini $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, l'element de superfície és $dS = \sqrt{5} \, dx \, dy$. La distància a l'eix de gir és $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aleshores,

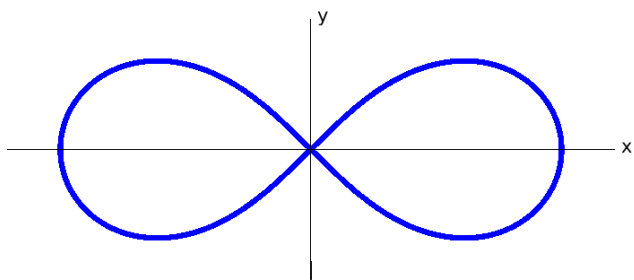
$$I_z = \rho \int_S r^2 \, dS = \rho \int_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{5} \, dx \, dy = \rho \cdot 2\pi\sqrt{5} \int_0^1 r^3 \, dr = \rho \cdot 2\pi\sqrt{5} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{5}\rho}{2}}$$

t3 Considerem a $\mathbb{R}^2$ la corba (anomenada lemniscata) definida per l'equació $3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ (vegeu la figura). Calculeu el treball (circulació) efectuat per la força

$$\vec{F} = (e^{y^2}, 2y(1 + xe^{y^2}))$$

sobre una partícula que es mou al llarg de la corba, dins el primer quadrant, des del punt $(0, 0)$ fins al punt $(4, 2)$.

- (a) 0 (b) $8e^4$ (c) $2e^4 - 1$ *(d) $4(e^4 + 1)$ (e) cap de les anteriors



Solució: Escrivint el camp vectorial com a $\vec{F} = (P, Q)$, es compleix que $P_y = Q_x$. Busquem doncs un possible potencial escalar $f(x, y)$, imposant que $f_x = P$, $f_y = Q$. Tenim:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int P(x, y) dx = xe^{y^2} + h(y), \\ f_y(x, y) &= 2xye^{y^2} + h'(y) = Q(x, y), \end{aligned}$$

d'on resulta que $h'(y) = 2y$. D'aquesta manera obtenim la funció $f(x, y) = xe^{y^2} + y^2$, que és un potencial escalar. Pel teorema de Newton–Leibniz, el treball és: $f(4, 2) - f(0, 0) = \boxed{4(e^4 + 1)}$

p1 Considereu el cilindre el·líptic $S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ orientat per la normal exterior al cilindre sòlid. Calculeu el flux del camp $\vec{F} = (2xy + 2yz, -y^2 - z^2, y^2 + z^2)$ a través de S .

Solució:

Com que la divergència de F és senzillament $2z$, serà convenient usar el teorema de Gauss. Si afegim a S les superfícies $S_0 = \{x^2 + 2y^2 \leq 1, z = 0\}$ i $S_1 = \{x^2 + 2y^2 \leq 1, z = 1\}$ obtindrem $S \cup S_0 \cup S_1 = \partial W$, on W és el cilindre sòlid. L'orientació que ens demanen és la de la normal exterior. Per tant, pel teorema de Gauss,

$$\int_W 2z dx dy dz = \int_{S^+} \langle F, d\mathbf{S} \rangle + \int_{S_0^+} \langle (2xy, -y^2, y^2), (0, 0, -1) \rangle dS + \int_{S_1^+} \langle (2xy + 2y, -y^2 - 1, y^2 + 1), (0, 0, 1) \rangle dS.$$

La suma de les dues darreres integrals s'escriu com

$$\int_{x^2 + 2y^2 \leq 1} (-y^2 + y^2 + 1) dx dy = \text{Area}(\{x^2 + 2y^2 \leq 1\}) = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

I la primera de totes

$$\int_W 2z dx dy dz = \int_{x^2 + 2y^2 \leq 1} \int_0^1 2z dz dy dx = \text{Area}(\{x^2 + 2y^2 \leq 1\}) \cdot \int_0^1 2z dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

i per tant el flux que ens demanen és: $\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \boxed{0}$

p2

Sigui C la circumferència de $\mathbb{R}^3$, amb centre $(3, 0, 0)$ i radi 1, continguda al pla vertical XZ (és a dir, $y = 0$). Fent girar aquesta circumferència al voltant de l'eix Z , obtenim com a superfície de revolució un tor. Sigui S la porció d'aquest tor definida per $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- (a) La vora de S està formada per dues corbes, $\partial S = C_1 \cup C_2$. Doneu parametritzacions d'aquestes corbes, que siguin compatibles amb l'orientació de S donada pel vector normal $(0, 0, 1)$ en el punt $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$.
- (b) Considereu el camp vectorial $\vec{F} = (x^2z, -2y^2z, xy)$. Aplicant el teorema de Stokes, calculeu el flux de $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de la superfície S , orientada com s'indica a l'apartat (a).

Solució:

- (a) Les corbes són dues circumferències,

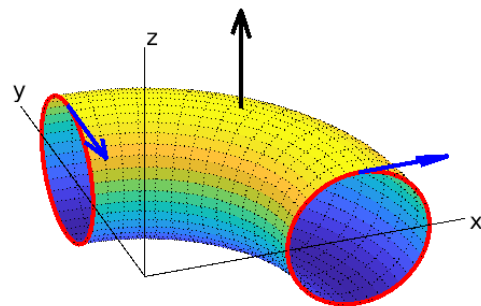
$$C_1 = C = \{(x, y, z) : (x - 3)^2 + z^2 = 1, y = 0\},$$

$$C_2 = \{(x, y, z) : (y - 3)^2 + z^2 = 1, x = 0\}$$

per a les quals podem donar, respectivament, les parametritzacions següents, que són compatibles amb l'orientació indicada per a S :

$$\sigma_1(t) = (3 + \cos t, 0, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\sigma_2(t) = (0, 3 + \cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



- (b) Pel teorema de Stokes,

$$\int_{S^+} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \oint_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle + \oint_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle.$$

Calculem aquestes dues circulacions usant les parametritzacions donades a l'apartat (a):

$$\oint_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle ((3 + \cos t)^2(-\sin t), *, 0), (-\sin t, 0, -\cos t) \rangle dt = \frac{37\pi}{4},$$

$$\oint_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (*, -2(3 + \cos t)^2 \sin t, 0), (0, -\sin t, \cos t) \rangle dt = \frac{37\pi}{2},$$

on hem usat:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{4}.$$

Sumant les dues circulacions, obtenim: $\int_{S^+} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = \boxed{\frac{111\pi}{4}}$