

Nom i cognoms:

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(P₁)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 16 Abr 2021

Temps: 1 h 15 min

Puntuacions:

* **Problemes:** p1 $\rightarrow$ 2.5 punts, p2 $\rightarrow$ 1.5 punts.

* **Test (t1, t2, t3):** respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

Nota màxima: 7 punts

p1

Considerem l'EDO de segon ordre $x'' = f(x)$, que descriu el moviment sobre la recta $\mathbb{R}$ d'una partícula (de massa 1), sobre la qual actua una força $f(x) = x(x - 2)$.

- Reescriu l'EDO com un sistema d'EDOs de primer ordre, prenent $y = x'$ com a segona funció incògnita. Trobeu tots els punts d'equilibri d'aquest sistema.
- Trobeu una funció $U(x)$ tal que $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ sigui una quantitat conservada del sistema.
- Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri del sistema.
- Suposem que la partícula parteix del repòs imposant, a l'EDO de segon ordre original, condicions inicials de la forma $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$. Trobeu els valors de x_0 (que no siguin punts d'equilibri) per als quals la solució tendeix a un punt d'equilibri quan $t \rightarrow +\infty$. [Nota: No és necessari conèixer la solució del sistema.]

Solució:

- El sistema equivalent és $x' = y$, $y' = f(x)$. El camp vectorial associat és $\mathbf{F}(x, y) = (y, f(x))$, i els zeros de $\mathbf{F}$ són els punts d'equilibri: $(0, 0)$ i $(2, 0)$.
- Calculem la derivada temporal de $E(x, y)$ sobre una trajectòria del sistema:

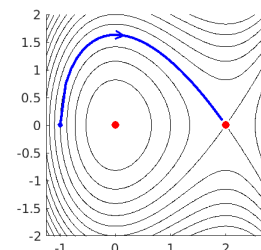
$$W(x, y) = \langle \nabla E(x, y), \mathbf{F}(x, y) \rangle = \langle (U'(x), y), (y, f(x)) \rangle = (U'(x) + f(x))y.$$

Tindrem una quantitat conservada si $U'(x) = -f(x)$ per a tot x . Integrant, obtenim $U(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$ (hem escollit la primitiva de manera que $U(0) = 0$). [Nota: podem considerar que $y^2/2$ i $U(x)$ són, respectivament, les energies cinètica i potencial de la partícula, i que $E(x, y)$ n'és l'energia total.]

- La matriu del sistema linealitzat per cada a punt d'equilibri és

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad DF(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- * En el cas del punt $(0, 0)$, el sistema linealitzat és un centre i per tant no decideix. Però tenim una quantitat conservada $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + x^2 - \frac{x^3}{3}$, que és definida positiva al $(0, 0)$ (ja que té un mínim relatiu estricte en aquest punt). Prenent-la com a funció de Lyapunov, deduíem que el $(0, 0)$ és estable no atractor (un centre no lineal).
 - * En el cas del punt $(2, 0)$, el sistema linealitzat és una sella i per tant aquest punt és inestable no repulsor.
- * Com que el $(0, 0)$ és un centre no lineal, no hi ha solucions que tendeixin a aquest punt (apart del propi punt).
 - * Si una solució tendeix al punt $(2, 0)$, l'òrbita que recorre estarà continguda en alguna corba de nivell $E(x, y) = c$. El punt límit ha de pertànyer a aquesta mateixa corba de nivell; per tant tindrem $c = E(2, 0) = 4/3$. Així doncs, la condició inicial satisfà $E(x_0, 0) = x_0^2 - x_0^3/3 = 4/3$, és a dir $x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$. Les arrels x_0 d'aquesta equació són -1 i 2 . Descartant $x_0 = 2$ que és punt d'equilibri, la resposta és $x_0 = -1$.



p2 La corba $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos z, y = \sin z, 0 \leq z \leq \pi/3\}$ és un tros d'una hèlix circular. Calculeu la seva longitud i les coordenades del seu centre geomètric (és a dir, suposant densitat constant).

.....

Solució:

Parametritzant la corba per $\sigma(z) = (\cos z, \sin z, z)$, $0 \leq z \leq \pi/3$, obtenim l'element de longitud:

$$d\ell = \sqrt{(-\sin z)^2 + \cos^2 z + 1} dz = \sqrt{2} dz.$$

Per tant, la longitud total és $\text{long}(C) = \int_C d\ell = \int_0^{\pi/3} \sqrt{2} dz = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$. Ara, calculem les integrals

$$\begin{aligned} \int_C x d\ell &= \int_0^{\pi/3} \cos z \cdot \sqrt{2} dz = \sqrt{2} \sin(\pi/3) = \sqrt{3/2}; \\ \int_C y d\ell &= \int_0^{\pi/3} \sin z \cdot \sqrt{2} dz = \sqrt{2} (1 - \cos(\pi/3)) = 1/\sqrt{2}; \\ \int_C z d\ell &= \int_0^{\pi/3} z \cdot \sqrt{2} dz = \pi^2/(9\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Finalment, dividint aquestes integrals per la longitud de C obtenim les coordenades del centre geomètric:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, \frac{3}{2\pi}, \frac{\pi}{6} \right).$$

t1 Considereu l'EDO autònoma $x' = (2\pi - x) \sin x$. Digueu quina de les afirmacions següents és certa.

- (a) té almenys una solució $x(t)$ que és periòdica i no constant
 - * (b) té almenys una solució $x(t)$ no constant tal que $x(t) \rightarrow 2\pi$ quan $t \rightarrow +\infty$
 - (c) té almenys una solució $x(t)$ no constant tal que $x(t) \rightarrow 3\pi$ quan $t \rightarrow +\infty$
 - (d) té almenys una solució $x(t)$ tal que $x(t) \rightarrow +\infty$ quan $t \rightarrow +\infty$
 - (e) cap de les anteriors
-

Solució: La funció $f(x) = (2\pi - x) \sin x$ s'anul·la en els punts de la forma $x_k = k\pi$ amb k enter. Aquests són tots els punts d'equilibri. Qualsevol solució no constant queda confinada entre dos punts d'equilibri i per tant no pot haver-hi cap solució que tendeixi a $+\infty$ ni $-\infty$. En qualsevol EDO autònoma de primer ordre, no pot haver-hi cap solució periòdica i no constant ja que això implicaria passar dos cops per un mateix punt en sentits diferents. D'altra banda, la funció $f(x)$ és negativa a ambdós costats del punt 2π , la qual cosa ens diu que aquest punt és inestable no repulsor (repulsor per l'esquerra, atractor per la dreta). En canvi, la funció $f(x)$ passa de negativa a positiva en el punt 3π , que resulta ser un repulsor. Per tant, hi ha una solució no constant que tendeix a 2π quan $t \rightarrow +\infty$, però no n'hi ha cap que tendeixi a 3π quan $t \rightarrow +\infty$.

t2 Considerem un sistema lineal $\vec{X}' = A\vec{X}$, on A és una matriu 3×3 de la qual sabem que té els vectors propis

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

amb els valors propis $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$, $\lambda_3 = 2$, respectivament. Si $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ és la solució que compleix la condició inicial $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, trobeu el valor de $y(\pi/2)$.

- (a) $y(\pi/2) = 0$ (b) $y(\pi/2) = 2e^\pi + e^{-\pi/2}$
 (c) $y(\pi/2) = -2e^{-\pi/2}$ *(d) $y(\pi/2) = -(e^\pi + e^{-\pi/2})$
 (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Escrivint els vectors propis complexos en termes de parts real i imaginària, $\vec{v}^{(1,2)} = \vec{w}^{(1)} \pm i\vec{w}^{(2)}$, notem que $\vec{X}(0) = \vec{w}^{(1)} + \vec{v}^{(3)}$. Llavors, tenim $\vec{X}(t) = \vec{Y}(t) + \vec{Z}(t)$, on $\vec{Y}(t)$ i $\vec{Z}(t)$ són les solucions que satisfan $\vec{Y}(0) = \vec{w}^{(1)}$ i $\vec{Z}(0) = \vec{v}^{(3)}$. Tenim:

$$\vec{Y}(t) = e^{-t} \left(\cos 2t \cdot \vec{w}^{(1)} - \sin 2t \cdot \vec{w}^{(2)} \right), \quad \vec{Z}(t) = e^{2t} \vec{v}^{(3)},$$

i deduïm que $\vec{X}(\pi/2) = -e^{-\pi/2} \vec{w}^{(1)} + e^\pi \vec{v}^{(3)}$. Prenent la segona component, resulta $y(\pi/2) = -(e^\pi + e^{-\pi/2})$.

t3 Considereu el sistema d'EDOs $x' = x + y$, $y' = x + \mu y$, on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Digueu quina de les afirmacions següents és certa.

- *(a) Si $\mu > 1$, és un node (b) Si $\mu < 1$, és un focus
 (c) Si $\mu > 1$, és una sella (d) Si $\mu < 1$, és un node
 (e) cap de les anteriors

.....

Solució: De la matriu del sistema veiem que la traça és $T = \mu + 1$, el determinant és $D = \mu - 1$ i el discriminant és $\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 2\mu + 5$. Notem que $\Delta = (\mu - 1)^2 + 4$, o sigui que $\Delta > 0$ per a qualsevol valor de μ (també es pot raonar a partir del fet que el polinomi $\Delta(\mu)$ no té arrels reals).

Si $\mu < 1$ tindrem $D < 0$, i per tant serà un sella, no pot ser ni un focus ni un node. Si $\mu > 1$ tindrem $D > 0$, i no pot ser una sella, però podria ser node, centre o focus. Com que $\Delta > 0$, per a $\mu > 1$ és un node.
