

- 1** Quants punts d'equilibri té exactament l'EDO $x' = a(x^3 + 2x^2 - bx - 2b)$ ($b < 4$) i quina és la seva estabilitat?
-

Solució:

Els punts d'equilibri són les solucions de l'equació $a(x^3 + 2x^2 - bx - 2b) = a(x + 2)(x^2 - b) = 0$. Si $0 < b < 4$ hi ha tres punts, si $b = 0$ dos i si $b < 0$ un de sol. En el punt en que el polinomi canvia de signe, si és creixent, tenim un punt repulsor, i si és decreixent un d'atractor. Si no canvia de signe, no és ni atractor ni repulsor.

- 2** Sigui $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del sistema lineal $X' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-a & 2a-2 \\ 2-2a & 4a-1 \end{pmatrix} X$ ($a \neq 1$) amb les condicions inicials $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quant val $x(1)$?
-

Solució:

Els valors propis són a i 1 . Una matriu fonamental és $\begin{pmatrix} e^{at} & 2e^t \\ 2e^{at} & e^t \end{pmatrix}$.

Imposem les condicions inicials: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Resulta $c_1 = c_2 = 1/3$ i llavors $x(1) = (e^a + 2e)/3$.

- 3** Considerem el sistema lineal $X' = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 2-\mu^2 & \mu-1 \end{pmatrix} X$, amb la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$. Com ha de ser el paràmetre a perquè la solució $X(t)$ compleixi que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = \infty$?
-

Solució:

Calculem la traça i el discriminant: $T = -1$, $D = \mu - 2$. El sistema és estable si $\mu \geq 2$, cas que descartem. Si $\mu < 2$ tenim una sella, i en aquest cas el vector $(2, a)$ no s'ha de trobar sobre la direcció atractora, i per tant no ha de ser vector propi de valor propi negatiu. El valor propi negatiu és $\lambda^- = (-1 - \sqrt{9 - 4\mu})/2$, amb vector propi $(2, 2\mu - 1 - \sqrt{9 - 4\mu})$. Per tant, hem de tenir $a \neq 2\mu - 1 - \sqrt{9 - 4\mu}$.

- 4** Sigui el sistema no lineal

$$x' = y - cyx^2, \quad y' = -x + cx^3 \quad (c > 0)$$

on $V(x, y) = x^2 + y^2$ és una quantitat conservada. Què podem dir de $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ per a la solució $(x(t), y(t))$ amb $(x(0), y(0)) = (a, b)$? [Ind.: Trobeu tots els punts d'equilibri i, si cal, determineu en quin sentit giren les trajectòries que no són punts d'equilibri.]

.....

Solució:

Els punts d'equilibri són $(0, 0)$ i les rectes verticals $x = \pm \sqrt{1/c}$. Totes les solucions estan contingudes en les circumferències centrades a l'origen. Les trajectòries contingudes en les de radi menor que $\sqrt{1/c}$ seran periòdiques i giraran en sentit horari. Les no trivials contingudes en la circumferència de radi $\sqrt{1/c}$ seran les semicircumferències amb $\{y > 0\}$ i $\{y < 0\}$ recorregudes en sentit horari. Les no trivials contingudes en les circumferències de radi major que $\sqrt{1/c}$ seran els quatre arcs $\{|x| < \sqrt{1/c}, y > 0\}$, $\{|x| < \sqrt{1/c}, y < 0\}$, $\{x > \sqrt{1/c}\}$ i $\{x < -\sqrt{1/c}\}$; els dos primers orientats en sentit horari i els dos últims en sentit antihorari. Totes les trajectòries que no són periòdiques tendeixen al primer punt d'equilibri que troben, segons el sentit de gir. D'aquesta manera,

- * si $a^2 + b^2 < 1/c$, llavors $\nexists \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$;
- * si $a^2 + b^2 = 1/c$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$;

- * si $a^2 + b^2 > 1/c$, $|a| < \sqrt{1/c}$ i $b > 0$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 1/c}$;
- * si $a^2 + b^2 > 1/c$, $|a| < \sqrt{1/c}$ i $b < 0$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\sqrt{a^2 + b^2 - 1/c}$;
- * si $a^2 + b^2 > 1/c$ i $a > \sqrt{1/c}$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 1/c}$;
- * si $a^2 + b^2 > 1/c$ i $a < -\sqrt{1/c}$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\sqrt{a^2 + b^2 - 1/c}$.

5 Considerem el sistema

$$x' = -cy + x^3, \quad y' = dx + bx^2y + y^3 \quad (c, d > 0)$$

on b és un paràmetre. Trobeu els valors de b per als quals podem assegurar que l'origen és un punt d'equilibri repulsor, si usem una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + y^2)$. [Ind.: Podeu usar que una funció $\alpha x^4 + \beta x^2y^2 + \gamma y^4$ amb $\alpha, \gamma > 0$, és definida positiva si i només si $\beta > -2\sqrt{\alpha\gamma}$.]

Solució:

La funció V és definida positiva si $a > 0$. Calculem:

$$W(x, y) = ax(-cy + x^3) + y(dx + bx^2y + y^3) = (d - ac)xy + ax^4 + bx^2y^2 + y^4.$$

Escollim $a = d/c$ per no tenir el terme xy (que és indefinit). Aleshores,

$$W(x, y) = \frac{d}{c} x^4 + bx^2y^2 + y^4,$$

que és una funció definida positiva quan $b > -2\sqrt{\frac{d}{c}}$.

6 Calculeu la longitud de la corba del pla definida per $y = \frac{x^3}{a} + \frac{a}{12x}$, $b \leq x \leq 2b$, essent $b > 0$ un paràmetre ($a > 0$).

Solució:

Per a la funció $f(x) = \frac{x^3}{a} + \frac{a}{12x}$, calculem:

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(\frac{3x^2}{a} - \frac{a}{12x^2} \right)^2 = \frac{9x^4}{a^2} + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{144x^4} = \left(\frac{3x^2}{a} + \frac{a}{12x^2} \right)^2.$$

Per tant, la longitud és

$$L = \int_b^{2b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_b^{2b} \left(\frac{3x^2}{a} + \frac{a}{12x^2} \right) dx = \frac{x^3}{a} - \frac{a}{12x} \Big|_b^{2b} = \frac{7b^3}{a} + \frac{a}{24b}.$$