

- t1** Calculeu la circulació del camp de vectors $\mathbf{F} = (y(e^{xy} - 1), x(e^{xy} + 1))$ al llarg de la semiel·lipse definida per $x^2/a^2 + y^2/(11-a)^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada en sentit antihorari. [Ind.: Podeu escriure $\mathbf{F}$ com la suma d'un camp de vectors que provingui d'un potencial escalar més un camp de vectors "senzill".]

Solució:

Es veu fàcilment que $\mathbf{F}_1 = (ye^{xy}, xe^{xy})$ és el gradient de $f(x, y) = e^{xy}$. Pel Teorema de Newton–Leibniz, la circulació de $\mathbf{F}_1$ serà $f(-a, 0) - f(a, 0) = 0$. La circulació de $\mathbf{F}_2 = (-y, x)$ es calcula parametritzant la corba, $\sigma(t) = (a \cos t, (11-a) \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, i obtenim:

$$\int_0^\pi \langle \mathbf{F}_2(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_0^\pi [(-(11-a) \sin t) \cdot (-a \sin t) + a \cos t \cdot (11-a) \cos t] dt = a(11-a)\pi.$$

Per tant, el resultat és $I = 0 + a(11-a)\pi = \boxed{a(11-a)\pi}$.

- t2** Calculeu la integral de la funció $g(x, y, z) = \sqrt{1 + 4az}$ sobre la superfície definida per $S = \{(x, y, z) : z = a(x^2 + y^2), 2az \leq 1\}$.

Solució:

Parametritzant S com una gràfica $\Phi(x, y) = (x, y, a(x^2 + y^2))$, amb domini $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1/(2a^2)\}$, tenim $\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = \sqrt{1 + 4a^2(x^2 + y^2)}$, que ens dona l'element de superfície. Aleshores,

$$\int_S f dS = \int_D f(\Phi(x, y)) \|\Phi_x \wedge \Phi_y\| dx dy = \int_D (1 + 4a^2(x^2 + y^2)) dx dy = 2\pi \int_0^{1/(\sqrt{2}a)} (1 + 4a^2 r^2) r dr = \boxed{\frac{\pi}{a^2}}.$$

- t3** Calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{F} = (x^2, y - 2xy, 30 - z)$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : z^3 = 1 - x^2 - (ay)^2, z \geq 0\}$ ($a > 0$), orientada pel vector normal $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ en el punt $(0, 0, 1)$.

Solució:

Notem que $\text{div } \mathbf{F} = 0$. Per tancar la superfície, afegim la tapa plana $S_0 = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + (ay)^2 \leq 1\}$, orientada pel vector $-\mathbf{k}$. Pel teorema de Gauss,

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{S_0^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{S_0} \langle \mathbf{F}, -\mathbf{k} \rangle dS = - \int_{S_0} (-30) dS = 30 \text{Area}(S_0) = \boxed{\frac{30\pi}{a}},$$

on hem usat que $z = 0$ sobre S_0 , i que S_0 és una el·lipse de semieixos 1 i $1/a$.

- t4** Considerem la superfície S definida per $z = 4 - x^2$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$, $z \geq 0$, orientada pel vector normal que té la tercera component positiva. Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F} = (x, z, y^2)$ al llarg de la vora ∂S , orientada de manera compatible amb l'orientació de S .

Solució:

Aplicant el teorema de Stokes, hem de calcular el flux de $\text{rot } \mathbf{F} = (2y - 1, 0, 0)$ a través de S amb l'orientació donada. Parametritzem S com una gràfica, $\Phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2)$, amb domini $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq b\}$. El vector normal associat és $\Phi_x \wedge \Phi_y = (2x, 0, 1)$, que té l'orientació demanada. Llavors,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle &= \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle \text{rot } \mathbf{F}(\Phi(x, y)), \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle dx dy \\ &= \int_D 2x(2y - 1) dx dy = \int_0^2 2x dx \cdot \int_0^b (2y - 1) dy = \boxed{4(b^2 - b)}. \end{aligned}$$

t5 Considerem l'EDO de primer ordre $x' = \frac{x^2(x-1)^2(x-2)^2}{x^6+1}$, amb la condició inicial $x(0) = a$. Quin és el límit de la solució $x(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$?

.....

Solució:

L'EDO té 3 punts d'equilibri: 0, 1 i 2 (els zeros de f). Fora d'aquests punts, sempre tenim $f(x) > 0$ i per tant qualsevol solució $x(t)$ és creixent, i tendirà cap al punt d'equilibri que té a la seva dreta o, si no n'hi té cap, a ∞ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < a \leq 1, \\ 2 & \text{si } 1 < a \leq 2, \\ \infty & \text{si } a > 2. \end{cases}$$

t6 Sigui $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ la solució del sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ amb la condició inicial $\mathbf{X}(0) =$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$. Trobeu el valor de $y(1)$.

.....

Solució:

Els valors propis són 0 i 1, i els vectors propis $\mathbf{v}^{(1)} = (1, 1)$, $\mathbf{v}^{(2)} = (2, 1)$, respectivament. Per tant, tenim com a matriu fonamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix},$$

i la solució general és $\mathbf{X}(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Imposant la condició inicial obtenim $c_1 = 2 - 3\alpha$, $c_2 = 2\alpha - 1$.

Així obtenim $y(1) = (2 - 3\alpha) + (2\alpha - 1)e$.
