

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 28 Oct 2019

Temps: 1 h 15 min

Puntuacions: **p1** $\rightarrow$ 4.5 punts; **p2** $\rightarrow$ 2.5 punts; **t1, t2, t3** $\rightarrow$ correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa).

Nota important: A les qüestions de test, cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

p1

Considereu el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, xy^2 - 3z^4, 5x^2 - 5y^2 + 3z + 7)$. Sigui W la regió de $\mathbb{R}^3$ tancada per la semiesfera $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0\}$ i pel disc $T = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- Calculeu el flux de $\mathbf{F}$ sortint de la regió W .
- Calculeu el flux de $\mathbf{F}$ a través del disc T orientat pel vector $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.
- Calculeu el flux de $\mathbf{F}$ a través de la semiesfera S orientada pel vector normal de component vertical positiva.

.....
Solució:

- Per Gauss, el flux sortint és

$$\begin{aligned} \oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_W \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int_W (4xy + 3) \, dx \, dy \, dz \\ &= 4 \int_W xy \, dx \, dy \, dz + 3 \int_W dx \, dy \, dz = 0 + 3 \operatorname{vol}(W) = 3 \frac{2}{3} \pi 2^3 = \boxed{16\pi}, \end{aligned}$$

on hem usat que $\int_W xy \, dx \, dy \, dz = 0$ per simetria (la funció xy és senar en la variable x i la regió W és simètrica respecte el pla $x = 0$; podem dir el mateix amb la variable y).

- La component normal al disc T del camp $\mathbf{F}$ és $F_N = \langle \mathbf{F}, \mathbf{k} \rangle = 5x^2 - 5y^2 + 3z + 7 = 5x^2 - 5y^2 + 7$, ja que $z = 0$ sobre T . El disc T és la gràfica de la funció $z = g(x, y) \equiv 0$ sobre el cercle $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Per tant, $dS = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} \, dx \, dy = dx \, dy$ i el flux demanat és

$$\begin{aligned} \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_T F_N \, dS = \int_D (5x^2 - 5y^2 + 7) \, dx \, dy \\ &= 5 \int_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy + 7 \int_D dx \, dy = 0 + 7 \operatorname{Area}(D) = 7 \pi 2^2 = \boxed{28\pi}, \end{aligned}$$

on hem usat que $\int_W (x^2 - y^2) \, dx \, dy \, dz = 0$ per simetria (la funció $h(x, y) = x^2 - y^2$ satisfà la relació $h(y, x) = -h(x, y)$, i el domini D és simètric respecte la recta $y = x$); altrament és fàcil calcular aquesta integral passant a polars i veure que val 0.

- Com que $\partial W = S \cup T$, els dos apartats anteriors impliquen que

$$16\pi = \oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + 28\pi \implies \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -12\pi.$$

Ara bé, quan apliquem Gauss per calcular el flux sortint de W , tota la frontera ∂W s'ha d'orientar amb la normal exterior. Però aquest apartat ens demana orientar la semiesfera S pel vector normal de component vertical positiva, que és la normal *interior* respecte la regió W . Per tant, hem de canviar el signe per trobar el flux demanat:

$$\int_{S^-} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \boxed{12\pi}.$$

p2

- (a) Considerem a $\mathbb{R}^2$ el camp vectorial $\mathbf{F}_\alpha = (2xy + e^y, x^2 + x e^y + \alpha x)$, on $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu el valor α_0 per al qual el camp $\mathbf{F}_{\alpha_0}$ prové d'un potencial escalar, i trobeu en aquest cas el potencial.
- (b) Donada la corba $C = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0 \right\}$ calculeu, per a qualsevol valor de α , la circulació de $\mathbf{F}_\alpha$ al llarg de C orientada en sentit antihorari.
- [Ind.: Escriuiu $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha_0} + \mathbf{G}$, on α_0 és el valor trobat a l'apartat (a) i $\mathbf{G}$ és un camp vectorial "senzill".]
-

Solució:

- (a) Escrivint $\mathbf{F} = (P, Q)$, la condició necessària $P_y = Q_x$ només es compleix si $\alpha = 0$. En aquest cas, fent algunes integrals o simplement a ull, trobem un potencial escalar, $f(x, y) = x^2 y + x e^y$.
- (b) Podem escriure $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_0 + \mathbf{G}$, on $\mathbf{G} = (0, \alpha x)$. Parametritzem la corba per $\sigma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, que té l'orientació demanada. Apliquem el teorema de Newton-Leibniz a $\mathbf{F}_0$ (usant el potencial trobat a l'apartat (a)) i la definició de circulació a $\mathbf{G}$,

$$\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(-2, 0) - f(2, 0) + \alpha \int_{C^+} x \, dy = -4 + \alpha \int_0^\pi 2 \cos t \cdot 3 \cos t \, dt = -4 + 3\alpha \int_0^\pi (1 + \cos 2t) \, dt = \boxed{3\pi\alpha - 4}.$$

t1

Considerem el filferro C donat en coordenades polars per $r = 2 \cos \theta$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, i amb densitat a cada punt igual a la distància a l'eix y . Calculeu-ne la massa.

- *(a) 2π (b) 4π (c) 6π (d) 3π (e) cap de les anteriors
-

Solució:

Prenent la parametrització $\sigma(\theta) = (g(\theta) \cos \theta, g(\theta) \sin \theta)$ on $g(\theta) = 2 \cos \theta$, sabem que $\|\sigma'(\theta)\| = \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} = 2$. La densitat és $\rho(x, y) = |x| = x$. Per tant,

$$m(C) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta \cdot 2 \, d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \boxed{2\pi}.$$

t2

Calculeu l'àrea de la superfície S que és la part del pla $x + y + z = 1$, compresa entre el pla $y = 0$ i el cilindre parabòlic $y = 1 - x^2$.

- (a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *(b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (e) cap de les anteriors
-

Solució:

El pla té com a vector normal $\mathbf{N} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, i l'angle α entre aquest vector i la direcció vertical $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ve donat per $\cos \alpha = \langle \mathbf{N}, \mathbf{k} \rangle = 1/\sqrt{3}$. La projecció de S sobre el pla xy és la regió $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Llavors,

$$\text{Area}(S) = \frac{\text{Area}(D)}{\cos \alpha} = \sqrt{3} \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}.$$

t3 Considerem a $\mathbb{R}^3$ les corbes

$$C_1 = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}, \quad C_2 = \{(x, y, z) : y = 0, z = 1 - x^2, z \geq 0\},$$

ambdues orientades amb origen al punt $(1, 0, 0)$ i final al punt $(-1, 0, 0)$. Sigui $\mathbf{F}$ un camp vectorial tal que $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 1)$. Si I_1, I_2 són les circulacions de $\mathbf{F}$ al llarg de les corbes C_1, C_2 recorregudes amb l'orientació indicada, calculeu la diferència $I_1 - I_2$.

- (a) 0 (b) 4π * (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Ho podem resoldre de diferents maneres,

- * Podem veure la unió de les dues corbes com la vora d'una superfície, $C_1 \cup C_2 = \partial S$, essent

$$S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Parametritzem S com una gràfica $\Phi(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, amb domini $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. El vector normal és $\Phi_x \wedge \Phi_y = (2x, 2y, 1)$. L'orientació de la vora compatible amb la d'aquesta parametrització és la considerada per a C_1 , i la contrària per a C_2 . Aplicant el teorema de Stokes,

$$I_1 - I_2 = \int_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle \text{rot } \mathbf{F}, \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle dx dy = \int_D dx dy = \text{Area}(D) = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

- * Considerem el segment $C_3 = \{(x, y, z) : y = z = 0, -1 \leq x \leq 1\}$, també orientat amb origen al punt $(1, 0, 0)$ i final al punt $(-1, 0, 0)$, i sigui I_3 la circulació al llarg de C_3 amb aquesta orientació. Tenim $C_1 \cup C_3 = \partial S_1$ i $C_2 \cup C_3 = \partial S_2$, on S_1 i S_2 són dos trossos de plans,

$$S_1 = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : y = 0, 0 \leq z \leq 1 - x^2\},$$

que considerem orientats per $\mathbf{N}_1 = (0, 0, 1)$ i $\mathbf{N}_2 = (0, -1, 0)$. Aplicant el teorema de Stokes sobre S_1 i S_2 , tot tenint en compte les orientacions, obtenim

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= \int_{\partial S_1^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{S_1^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N}_1 \rangle dS = \int_{S_1} dS = \text{Area}(S_1) = \frac{\pi}{2}, \\ I_2 - I_3 &= \int_{\partial S_2^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{S_2^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S_2} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N}_2 \rangle dS = 0, \end{aligned}$$

i només cal restar els dos resultats obtinguts.

- * Finalment, també podem escollir un camp vectorial $\mathbf{F}$ tal que $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 1)$, per exemple $(0, x, 0)$, $(-y, 0, 0)$ o $\frac{1}{2}(-y, x, 0)$, i calcular directament les circulacions I_1 i I_2 .