

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 2 Abr 2019

Temps: 1 h 15 min

Puntuacions: p1 $\rightarrow$ 4 punts; p2 $\rightarrow$ 3 punts; t1, t2, t3 $\rightarrow$ correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts.

Nota important: A les qüestions de test, cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

p1 Considerem, sobre el semiplà xz amb $z \geq 0$, la semicircumferència C de centre $(1, 0)$ i radi $1/2$. Fent girar C al voltant de l'eix z , generem una superfície de revolució S .

- Calculeu l'àrea de S .
- Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F} = \left(xy + z, \frac{x^2}{2} + z, x + y \right)$ al llarg de la vora ∂S , si considerem S orientada per la normal exterior.
- Calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{G} = (x, y, xy)$ a través de S , amb la mateixa orientació que a l'apartat (b).

Solució:

- L'àrea de S és la de mig tor. Apliquem el primer teorema de Guldin, tenint en compte que la corba C té longitud $\pi/2$ i que el centre geomètric de C es troba a distància 1 de l'eix de gir: $\text{Area}(S) = \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi = \boxed{\pi^2}$.
- Notem que la vora ∂S està formada per dues corbes tancades (que són circumferències de radis $1/2$ i $3/2$). El camp $\mathbf{F}$ és conservatiu, ja que admet el potencial escalar $f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} + xz + yz$. Per tant, la circulació demanada és $\boxed{0}$.
Una altra opció és aplicar el teorema de Stokes, usant que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- Per tal d'aplicar el teorema de Gauss, afegim a S una "tapa", consistent en una corona circular:

$$T = \left\{ (x, y, z) : z = 0, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4} \right\}.$$

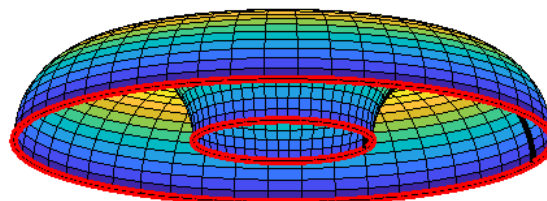
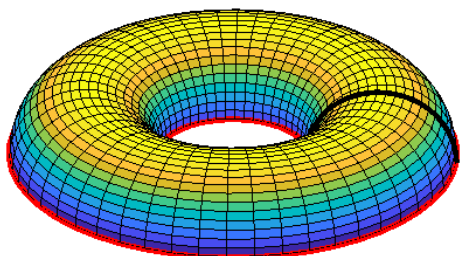
Llavors tenim una superfície tancada, $S \cup T = \partial W$, on W és "mig tor sòlid": la superfície de revolució generada pel semicercle B del pla xz , de centre $(1, 0)$ i radi $1/2$, i amb $z \geq 0$. Hem d'orientar T pel vector normal $\mathbf{N}_T = (0, 0, -1)$ (exterior a W). Usant que $\text{div } \mathbf{G} \equiv 2$, tenim:

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W \text{div } \mathbf{G} \, dx \, dy \, dz = 2 \text{vol}(W) = 2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi^2}{2},$$

on hem calculat el volum aplicant el segon teorema de Guldin, tenint en compte que l'àrea de B és $\pi/8$ i que el centre geomètric de B es troba a distància 1 de l'eix de gir. Per tant,

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \frac{\pi^2}{2} - \int_{T^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \frac{\pi^2}{2} - \int_T \langle \mathbf{G}, \mathbf{N}_T \rangle \, dS = \frac{\pi^2}{2} + \int_T xy \, dS = \boxed{\frac{\pi^2}{2}},$$

on la darrera integral (de xy sobre T) val 0 per simetria.



p2

Donada la regió plana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \geq 2\}$, sigui $C = \partial D$ la corba frontera orientada positivament (antihoràriament).

- (a) Descriviu C com una corba regular a trossos, indicant per a cada tros una parametrització i el seu interval de definició. Indiqueu si les parametritzacions escollides respecten l'orientació.
- (b) Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F} = (0, x^2 + y^2)$ al llarg de C^+ , amb l'orientació indicada. [Ind.: Apliqueu directament la definició de circulació.]

Solució:

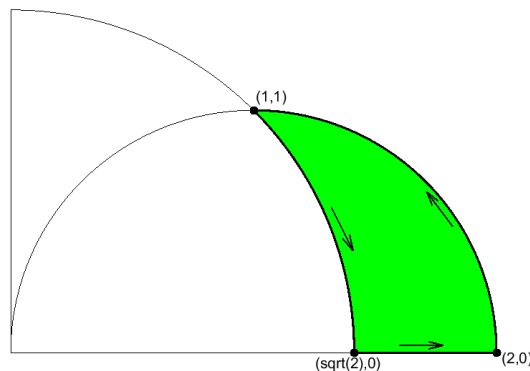
- (a) Amb un petit dibuix podem veure que la regió D ve limitada per un segment sobre l'eix x i dos arcs de circumferència d'equacions $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. Fent les interseccions, trobem que els vèrtexs de la regió D són els punts $(\sqrt{2}, 0)$, $(2, 0)$ i $(1, 1)$. Amb aquestes dades, podem considerar les parametritzacions següents:

$$\sigma_1(t) = (t, 0), \quad t \in [\sqrt{2}, 2];$$

$$\sigma_2(t) = (1 + \cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/2];$$

$$\sigma_3(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, \pi/4].$$

Les dues primeres respecten l'orientació antihorària de C , però la tercera té l'orientació contrària.



- (b) Calculem:

$$\int_{\sigma_1} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 0, \quad \text{ja que el camp és ortogonal al segment en cada punt;}$$

$$\int_{\sigma_2} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^{\pi/2} \langle \mathbf{F}(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle dt = \int_0^{\pi/2} (2 + 2 \cos t) \cos t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos t + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2} + 2;$$

$$\int_{\sigma_3} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^{\pi/4} \langle \mathbf{F}(\sigma_3(t)), \sigma_3'(t) \rangle dt = \int_0^{\pi/4} 2 \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 2.$$

Sumant les dues primeres circulacions i restant la tercera, obtenim: $\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 0 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) - 2 = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

t1 La parametrització $x(t) = 1 - t^2$, $y(t) = t^3 - t$, recorre una corba simple tancada del pla (x, y) quan t recorre l'interval $[-1, 1]$. Calculeu l'àrea encerclada per aquesta corba.

- *(a) $\frac{8}{15}$ (b) $\frac{21}{25}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{3}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Usant la fórmula de Green, aquesta àrea seria $\int_C (-y) dx$ si la parametrització donada recorre la corba en sentit positiu (antihorari), o aquesta mateixa quantitat canviada de signe en cas contrari. Fem la integral sense mirar l'orientació de la corba, i finalment ens quedarem amb el seu valor absolut si surt negativa:

$$\int_{-1}^1 (-t^3 + t) \cdot (-2t) dt = 2 \int_{-1}^1 (t^4 - t^2) dt = -\frac{8}{15},$$

i per tant l'àrea és $A = 8/15$.

[Nota: Alternativament, podem veure la primera meitat de la corba ($t \in [-1, 0]$) com una gràfica: $y = f(x) = x\sqrt{1-x}$, $x \in [0, 1]$ (que obtenim aïllant t de $x = x(t)$ i substituint a $y(t)$). Com que l'altra meitat és simètrica, l'àrea és $A = 2 \int_0^1 f(x) dx$.]

t2 Calculeu la massa del filferro que segueix la corba intersecció entre l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el pla $x + z = 0$, suposant que la densitat és $\rho(x, y, z) = x^2$.

- (a) $\sqrt{2}\pi$ (b) 4π (c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ *(d) $\frac{\pi}{2}$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Sobre la corba intersecció tenim $x^2 + y^2 + z^2 = 2x^2 + y^2 = 1$, amb $z = -x$, i per tant podem parametritzar-la per $\sigma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Fàcilment veiem que $\|\sigma'(t)\| = 1$ per a tot t , i obtenim:

$$M = \int_C x^2 d\ell = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

t3 Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ el triangle de vèrtexs $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$, orientat segons el vector normal $\vec{N} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Sigui C^+ la vora de S , orientada de manera compatible amb l'orientació anterior. Calculeu sobre C^+ la circulació del camp de vectors $\vec{F}(x, y, z) = (az, bx, cy)$, on a, b, c són nombres reals qualssevol donats.

- (a) $(b - a)/2$ (b) $(a + b + c)/2$ (c) 0 *(d) $(a - c)/2$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Useu el teorema de Stokes: $\text{rot } \vec{F} = (c, a, b)$, $\langle \text{rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle = (-c + a)/\sqrt{2}$ (constant). Com que l'àrea del triangle és $\sqrt{2}/2$ (ja que és un triangle rectangle de catets $\sqrt{2}$ i 1), la resposta és $(a - c)/2$.