

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 2 Nov 2018

Temps: 1 h 15 min

Puntuacions: t1, t2, t3 → correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts; p1 → 4 punts; p2 → 3 punts.

Nota important: A les qüestions de test, cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

p1 Sigui S la superfície definida per $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1 + x + y$.

- (a) Calculeu la seva àrea.
 (b) Calculeu el flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, z, x^3)$ a través de S orientada de tal manera que, en el punt $(0, 0, 1/2)$, el vector normal és $(0, -1, 0)$.

Solució:

- (a) La superfície S és un tros de cilindre vertical, que té com a base la circumferència C definida per $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ sobre el pla $z = 0$, i limitat superiorment per la gràfica de $z = 1 + x + y$ sobre la corba C . Parametritzant la corba C per $\sigma(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, obtenim:

$$\text{Area}(S) = \int_C z \, d\ell = \int_0^{2\pi} (2 + \cos t + \sin t) \, dt = \boxed{4\pi}.$$

- (b) Per tal d'aplicar el teorema de Gauss, considerem una superfície tancada $S \cup S_1 \cup S_2$ afegint unes "tapes planes" parametritzades per

$$S_1: \quad z = 0, (x, y) \in K \quad \text{i vector normal } (z_x, z_y, -1) = (0, 0, -1),$$

$$S_2: \quad z = 1 + x + y, (x, y) \in K \quad \text{i vector normal } (-z_x, -z_y, 1) = (-1, -1, 1),$$

ambdues amb el domini $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$. Notem que els plans $z = 0$ i $z = 1 + x + y$ no es tallen sobre el domini K , i per tant cal considerar-lo sencer.

Calculem el flux de $\mathbf{F}$ a través S_1 i S_2 :

$$\begin{aligned} \int_{S_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_K \langle (y^2, 0, x^3), (0, 0, -1) \rangle \, dx \, dy = - \int_K x^3 \, dx \, dy = 0, \\ \int_{S_2^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_K \langle (y^2, 1 + x + y, x^3), (-1, -1, 1) \rangle \, dx \, dy = \int_K (-y^2 - 1 - x - y + x^3) \, dx \, dy \\ &= - \int_K (y^2 + 1 + y) \, dx \, dy = - \int_{K^*} (3 + 3r \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= - \left(3 \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r \, dr + 0 + \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \right) = -\frac{13\pi}{4}, \end{aligned}$$

on hem usat que les integrals de x^3 i x valen 0 per la simetria respecte l'eix $x = 0$, i hem passat a coordenades polars $x = r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$ (centrades al punt $(0, 1)$), en què el domini esdevé $K^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Finalment, com que el camp $\mathbf{F}$ té divergència igual a 0, deduïm:

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{S_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle - \int_{S_2^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \boxed{\frac{13\pi}{4}}.$$

[Nota: També és factible aplicar directament la definició de flux, usant la parametrització de S donada per $\Psi(\theta, z) = (\cos \theta, 1 + \sin \theta, z)$ sobre el domini $D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2 + \cos \theta + \sin \theta\}$.]

p2

- (a) Feu servir el teorema de Green per a calcular la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y) = (xy, x^2y^2)$ al llarg del trapezi de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ i $(0, 1)$ recorregut en sentit horari.
- (b) Prové el camp $\mathbf{F}$ d'un potencial escalar? Justifiqueu la resposta.

Solució:

- (a) Sigui D l'interior del trapezi de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ i $(0, 1)$. Sigui $C^+ = \partial D$ la frontera orientada en sentit antihorari, i C^- en sentit horari. Escrivim $\mathbf{F} = (P, Q)$, amb $P = xy$ i $Q = x^2y^2$. Llavors:

$$\begin{aligned} \oint_{C^-} P \, dx + Q \, dy &= - \oint_{C^+} P \, dx + Q \, dy = - \int_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy = - \int_D (2xy^2 - x) \, dx \, dy \\ &= \left[\text{Fubini} \right] = - \int_0^1 x \left(\int_0^{1+x} (2y^2 - 1) \, dy \right) \, dx = - \int_0^1 x \left[\frac{2y^3}{3} - y \right]_{y=0}^{y=1+x} \, dx \\ &= - \int_0^1 x \left(\frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{3} - 1 - x \right) \, dx = - \frac{1}{3} \int_0^1 (2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - x) \, dx = \boxed{-\frac{4}{5}}. \end{aligned}$$

- (b) La circulació al llarg del trapezi C no dona zero, i per tant deduïm que el camp $\mathbf{F}$ no prové d'un potencial escalar.

t1

Calculeu la massa de la circumferència de $\mathbb{R}^3$ donada per $\sigma(t) = (R \cos t, R\sqrt{3} \cos t, 2R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, si la densitat en cada punt és la distància al pla horitzontal $z = 0$.

- (a) $8\pi R^2$ (b) $4R^2$ (c) 0 *(d) $16R^2$ (e) cap de les anteriors

Solució:

La velocitat de la parametrització donada és constant: $\|\sigma'(t)\| = 2R$. Llavors,

$$M = \int_C |z| \, d\ell = \int_0^{2\pi} 2R |\sin t| \cdot 2R \, dt = 8R^2 \int_0^\pi \sin t \, dt = 16R^2.$$

[Nota: La circumferència donada és la intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ amb el pla $y = \sqrt{3}x$, i està formada per dos meridians oposats de l'esfera.]

t2

Calculeu el flux del camp $\mathbf{F} = (x, y, z)$ a través de la semiesfera $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$, orientada per la normal exterior a l'esfera.

- (a) $\frac{4}{3}\pi R^3$ *(b) $2\pi R^3$ (c) $4\pi R^2$ (d) $4\pi R^3$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Com que el propi camp vectorial $\mathbf{F}$ és normal a l'esfera en cada punt, tenim $\mathbf{N} = (x, y, z)/R$. Llavors, el flux ve donat per $\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, dS = \int_S R \, dS = R \text{Area}(S) = 2\pi R^3$.

t3

Donat el camp vectorial $\mathbf{F} = (xy, x + y, -y^2)$, calculeu el flux del camp $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{F}$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$ orientada per $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ en el punt $(0, 0, 0)$.

- (a) $-\pi$ (b) 8π (c) $-\sqrt{2}\pi$ *(d) 2π (e) cap de les anteriors

Solució:

Tenim $\mathbf{G} = (-2y, 0, 1 - x)$. Com que $\text{div } \mathbf{G} = \text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$, aplicant el teorema de Gauss el flux demanat coincideix amb el flux a través de la tapa superior (un tros de pla) $S_1 = \{(x, y, z) : z = 2, x^2 + y^2 \leq 2\}$ orientada també per $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Obtenim: $\int_{S^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, dS = \int_{S_1} (1 - x) \, dx \, dy = \text{Area}(S_1) = 2\pi$.

Una segona opció és aplicar el teorema de Stokes, parametritzant la vora ∂S per $\sigma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (orientació compatible amb la de S). Llavors, el flux demanat és $\int_{S^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = 2\pi$.

I encara una tercera opció és aplicar directament la definició de flux, parametritzant S com una gràfica: $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ (que té l'orientació demanada), amb domini $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Obtenim $\int_{S^+} \langle \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle \mathbf{G}(\Phi(x, y)), \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle \, dx \, dy = \int_D (4xy + 1 - x) \, dx \, dy = \text{Area}(D) = 2\pi$ (usant simetria).