

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 6 Abr 2018

Temps: 1 h 15 min

Puntuacions: p1 $\rightarrow$ 4 punts; p2 $\rightarrow$ 3 punts; t1, t2, t3 $\rightarrow$ correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts.

p1

Considereu la superfície $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$, orientada pel vector normal que tingui la tercera component positiva, i la seva vora ∂S , orientada de manera compatible. Donat el camp vectorial $\mathbf{F} = (y, z, x)$, calculeu la seva circulació al llarg de ∂S^+ de les dues maneres següents:

- (a) directament (aplicant la definició de circulació)
 (b) aplicant el teorema de Stokes

Solució:

- (a) Parametritzem ∂S^+ per $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2 \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Aquesta orientació és compatible amb l'orientació esmentada perquè el vector normal deixa a la seva esquerra l'interior de S quan es mou al llarg de ∂S en la direcció en què la t augmenta. Tenim $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -2 \sin t)$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, 2 + 2 \cos t, 1 + \cos t), (-\sin t, \cos t, -2 \sin t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2 \cos t + 2 \cos^2 t - 2 \sin t - 2 \sin t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos 2t + 2 \cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t - 2 \sin t - \sin 2t) dt = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$

- (b) Hem de calcular el flux de $\text{rot } \mathbf{F} = (-1, -1, -1)$ a través de la superfície S , orientada com s'indica a l'enunciat. Parametritzem S per $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, amb domini $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$, obtenint com a vector normal $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-2x, -2y, 1)$, i com que la tercera component és positiva, veiem que aquesta parametrització és compatible amb l'orientació. Aleshores:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle &= \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle (-1, -1, -1), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy \\ &= \int_D (2x + 2y - 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + 2r \cos \theta + 2r \sin \theta - 1) r d\theta dr = \int_0^1 2\pi r dr = \boxed{\pi} \end{aligned}$$

on, com que D és el disc de radi 1 centrat al punt $(x, y) = (1, 0)$, hem fet el canvi a polars centrades en aquest punt: $x = 1 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

t1

Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F} = (e^y \cos x, e^y \sin x)$ al llarg del tros de circumferència centrada al punt $(1, 0)$ i de radi 1, que va del punt $(0, 0)$ al punt $(1, 1)$ en sentit antihorari.

- *(a) $e \sin 1$ (b) $(e - 1)\pi$ (c) 0 (d) $e \cos 1 - 1$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Escrivint $\mathbf{F} = (P, Q)$, es compleix la condició necessària perquè el camp sigui conservatiu: $P_y = e^y \cos x = Q_x$. Integrem, per buscar un possible potencial:

$$f(x, y) = \int P(x, y) dx = e^y \sin x + h(y),$$

i veiem que amb $h(y) \equiv 0$ ja es compleix que $f_y = Q$. Obtenim la funció $f(x, y) = e^y \sin x$, que és un potencial escalar: $\nabla f = \mathbf{F}$. Aplicant el teorema de Newton-Leibniz,

$$\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(1, 1) - f(0, 0) = e \sin 1.$$

p2

- (a) Calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{F} = (2y^2, y, -z)$ a través de la superfície (part d'un paraboloides) definida per $S = \{(x, y, z) : z = -(x-1)^2 - y^2, z \geq 2x-5\}$, orientada per $\mathbf{N}_S = (0, 0, 1)$ al punt $(1, 0, 0)$.
- (b) Deduïu de (a) el flux del mateix camp vectorial $\mathbf{F}$ a través de la superfície (tros de pla) definida per $T = \{(x, y, z) : z = 2x-5, z \leq -(x-1)^2 - y^2\}$, que orientem per $\mathbf{N}_T = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1)$.
-

Solució:

- (a) La corba intersecció queda determinada pel sistema $z = -(x-1)^2 - y^2, z = 2x-5$, que és equivalent al sistema $z = -(x-1)^2 - y^2, x^2 + y^2 = 4$. Per tant, podem escriure $S = \{(x, y, z) : z = -(x-1)^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$. El vector normal a S és $(-z_x, -z_y, 1) = (2(x-1), 2y, 1)$, que té l'orientació demanada. Llavors,

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{x^2+y^2 \leq 4} (4xy^2 - y^2 + x^2 - 2x + 1) dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy = \boxed{4\pi},$$

on hem usat la simetria per cancel·lar alguns termes de la integral.

- (b) Les superfícies S i T constitueixen la frontera del sòlid $W = \{(x, y, z) : z \leq -(x-1)^2 - y^2, z \geq 2x-5\}$. Com que el camp és solenoidal ($\text{div } \mathbf{F} \equiv 0$), aplicant el teorema de Gauss resulta que $\oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 0$, on orientem la frontera $\partial W = S \cup T$ per la normal *exterior* a W . Ara bé, l'orientació $\mathbf{N}_S$ considerada a l'apartat (a) correspon a la normal exterior a W , però l'orientació $\mathbf{N}_T$ que ens demanen ara correspon a la normal *interior* a W . Per tant,
- $$\int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \boxed{4\pi}.$$

t2

Calculeu l'àrea de la tanca que té per base la corba $(x-R)^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$, i altura $f(x, y) = x$.

- (a) $\pi(R^2 + 2)$ (b) $\frac{\pi R^2}{2}$ *(c) πR^2 (d) $\pi(R^2 + 1)$ (e) cap de les anteriors
-

Solució:

La corba és una semicircumferència, que parametritzem per $\sigma(t) = (R + R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, amb velocitat $\|\sigma'(t)\| = R$. Integrem la funció altura:

$$\int_C f d\ell = \int_0^\pi f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^\pi (R + R \cos t) R dt = \pi R^2.$$

t3

Donat un domini $D \subset \mathbb{R}^2$, considereu la superfície $S = \{(x, y, z) : z = 0, (x, y) \in D\}$, orientada per $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. El flux d'un camp vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ a través de S és $\int_D h(x, y, 0) dx dy$, essent:

- (a) $h = P + Q$ *(b) $h = R$ (c) $h = \frac{\partial R}{\partial z}$ (d) $h = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ (e) cap de les anteriors
-

Solució:

La superfície S , que és un tros de pla, es parametritza de manera trivial per $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in D$. El vector normal associat és $\Phi_x \wedge \Phi_y = (0, 0, 1)$, que té l'orientació demanada. Per tant,

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle \mathbf{F}(\Phi(x, y)), \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle dx dy = \int_D R(x, y) dx dy.$$