

1

[4 punts]

Sigui S la superfície consistent en la part de l'hiperboloide d'una fulla $P = \{z^2 + 1 = x^2 + y^2\}$ que es troba dins de l'esfera $E = \{x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$, i suposem que orientem S pel vector normal $N = (1, 0, 0)$ en el punt $(1, 0, 0)$. Considerem el camp vectorial $\vec{F} = (y^2 z^2, 2xz, xy^2)$, i el seu rotacional: $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$.

- Descriu la vora ∂S com a unió de les corbes C_1 (inferior) i C_2 (superior) obtingudes en interseccar P i E . Parametritzeu C_1 i C_2 , de tal manera que l'orientació d'aquestes parametritzacions sigui compatible amb la de S .
- Calculeu el flux del camp $\vec{G}$ a través de S , amb l'orientació considerada, usant el teorema de Stokes.
- Descriu els discs horitzontals T_1 i T_2 tals que $\partial T_1 = C_1$ i $\partial T_2 = C_2$. Si orientem aquests discs pels vectors normals $N_1 = (0, 0, -1)$ i $N_2 = (0, 0, 1)$ respectivament, trobeu els fluxos del camp $\vec{G}$ a través de T_1 i T_2 .

Solució:

- Aïllant z^2 de les equacions de P i E , obtenim $z^2 = x^2 + y^2 - 1 = 3 - x^2 - y^2$, i per tant la projecció de C_1 i C_2 sobre el pla XY ve donada per $x^2 + y^2 = 2$. Això ens diu que $z^2 = 1$, i per tant tenim dues circumferències:

$$C_1 = \{x^2 + y^2 = 2, z = -1\}, \quad C_2 = \{x^2 + y^2 = 2, z = 1\}.$$

Per tal que l'orientació de la vora ∂S sigui compatible amb la de S , cal parametritzar C_1 en sentit antihorari, i C_2 en sentit horari:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, -1), \quad t \in [0, 2\pi], \\ \sigma_2(t) &= (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

- Pel teorema de Stokes tenim

$$I = \int_{S^+} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = \oint_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle + \oint_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle$$

amb les orientacions de C_1 i C_2 obtingudes a l'apartat (a). Els vectors tangents respectius són $\sigma_1'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0)$ i $\sigma_2'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 0)$. Llavors,

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (-2\sqrt{2} \sin^3 t - 4 \cos^2 t) dt = -4\pi, \\ I_2 &= \oint_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (-2\sqrt{2} \sin^3 t - 4 \cos^2 t) dt = -4\pi, \end{aligned}$$

on hem usat que la integral de $\sin^3 t$ és 0. Deduïm que $I = I_1 + I_2 = \boxed{-8\pi}$.

- Els discs venen donats per $T_1 = \{x^2 + y^2 \leq 2, z = -1\}$ i $T_2 = \{x^2 + y^2 \leq 2, z = 1\}$. Els fluxos de $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de T_1 i T_2 es poden calcular també amb el teorema de Stokes, però en aquest cas cal orientar $C_1 = \partial T_1$ en sentit horari, i $C_2 = \partial T_2$ en sentit antihorari. Així doncs, els fluxos demanats són els que s'han calculat a l'apartat (b), però canviats de signe: $-I_1 = \boxed{4\pi}$ i $-I_2 = \boxed{4\pi}$.

2

[2.5 punts]

Useu el teorema de Green per calcular l'àrea encerclada per la cardioide, definida en coordenades polars per $r = 1 + \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solució:

La cardioide és una corba tancada C^+ que, recorreguda en sentit antihorari, ve descrita per la parametrització $\sigma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$, essent $x(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta$, $y(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$. Pel teorema de Green, l'àrea és

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{C^+} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3 + \cos 2\theta}{2} + 2 \cos \theta \right) d\theta = \boxed{\frac{3\pi}{2}}, \end{aligned}$$

on hem calculat:

$$\begin{aligned} x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta) &= (1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot (-\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta) - (1 + \cos \theta) \sin \theta \cdot (-\sin \theta \cos \theta - (1 + \cos \theta) \sin \theta) \\ &= (1 + \cos \theta)^2 = 1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta = \frac{3 + \cos 2\theta}{2} + 2 \cos \theta. \end{aligned}$$

3

[3.5 punts]

Segui S la placa definida com la part del cilindre $x^2 + y^2 = 4$ continguda dins el cilindre sòlid $x^2 + z^2 \leq 4$, i amb $x, y, z \geq 0$.

- Doneu una parametrització de S , indicant clarament quin és el domini.
- Si la densitat a cada punt de la placa coincideix amb la distància al pla XZ , calculeu la massa de la placa.
- Calculeu el flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, x^2 z)$ a través de S , orientada pel vector normal que té la component y positiva.

Solució:

- Podem parametritzar S com una gràfica $y = y(x, z)$:
 $\Phi(x, z) = (x, \sqrt{4 - x^2}, z)$, amb domini $K = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0\}$.
 - També podem parametritzar S per:
 $\Psi(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$, amb domini $D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 2 \sin \theta\}$.
- Si usem la primera de les parametritzacions esmentades a l'apartat (a), la densitat és $\rho(x, y, z) = y$ i el vector normal $(-y_x, 1, -y_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, 1, 0 \right)$ que té norma $\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$. Llavors,

$$\text{Massa} = \int_K \rho \, dS = \int_K \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx \, dz = 2 \text{Àrea}(K) = \boxed{2\pi}.$$

- Usant també la primera parametrització de l'apartat (a),

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_K \left\langle \left(\sqrt{4 - x^2}, x, x^2 z \right), \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, 1, 0 \right) \right\rangle \, dx \, dz = \int_K 2x \, dx \, dz = \boxed{\frac{16}{3}},$$

on hem usat coordenades polars per tal de calcular la integral doble.