

Nom i cognoms:

Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 6/IV/2017

Temps: 1 h 15 min

1

[2.5 punts]

Una paret de planta circular donada per l'equació $x^2 - 2x + y^2 = 0$, té en cada punt una alçada $x^2 + y^2$. Calculeu l'àrea de la paret.

Solució:

La base de la paret és la circumferència $C = \{x^2 - 2x + y^2 = 0, z = 0\}$ (continguda al pla xy), de centre $(1, 0)$ i radi 1. Obtenim l'àrea com la integral sobre C de la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$. Si parametritzem C , sobre el pla xy , per $\sigma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, tenim $\|\sigma'(t)\| = 1$ i $f(\sigma(t)) = 2(1 + \cos t)$. Obtenim:

$$A = \int_C f \, d\ell = \int_0^{2\pi} 2(1 + \cos t) \, dt = \boxed{4\pi}.$$

O bé, donat que en coordenades polars podem descriure C per $r = 2 \cos \theta$, també podem considerar la parametrització $\gamma(\theta) = (2 \cos^2 \theta, 2 \cos \theta \sin \theta) = (1 + \cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, que dóna lloc al mateix resultat.

2

[2.5 punts]

Considereu la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida per $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$ orientada per la normal exterior al cilindre. Parametritzeu-la per les coordenades cilíndriques (θ, z) i escriviu el vector diferencial de superfície $d\vec{S}$ en aquestes coordenades. Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (3x, 3y, 3(x^2 + y^2))$ a través de S .

Solució:

$S = \varphi(D)$ amb $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ i $\varphi(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$. Amb això,

$$d\vec{S} = (\varphi_\theta \wedge \varphi_z) \, d\theta \, dz = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) \, d\theta \, dz,$$

que veiem que està orientat tal i com volíem. Aleshores

$$\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (6 \cos \theta, 6 \sin \theta, 12), (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) \rangle \, d\theta \, dz = \boxed{24\pi}.$$

Sigui S la superfície del tros del paraboloid el·líptic d'equació $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ amb $1 \leq z \leq 2$, i considerem el camp vectorial $\vec{F} = (x + y^2, y + x^3, 1)$.

- Parametritzeu S com una gràfica, tot indicant el domini D de la parametrització.
- Descriviu superfícies T_1 i T_2 i un domini sòlid W adequats, per tal que $S \cup T_1 \cup T_2 = \partial W$.
- Calculeu la divergència i el rotacional de $\vec{F}$.
- Calculeu $I = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ aplicant el teorema de Gauss, si orientem S pel vector normal exterior al sòlid W considerat a (b).
- Calculeu $J = \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ aplicant el teorema de Stokes, si orientem la vora ∂S de forma compatible amb l'orientació de S considerada a (d).

Solució:

- $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2/4)$, amb el domini $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2/4 \leq 2\}$ (una corona el·líptica).
- Afegint els discs el·líptics plans $T_1 = \{z = 1, x^2 + y^2/4 \leq 1\}$ (tapa inferior) i $T_2 = \{z = 2, x^2/2 + y^2/8 \leq 1\}$ (tapa superior), obtenim una superfície tancada: $S \cup T_1 \cup T_2 = \partial W$, amb el domini sòlid

$$W = \left\{ (x, y, z) : z \geq x^2 + \frac{y^2}{4}, 1 \leq z \leq 2 \right\}.$$

- $\operatorname{div} \vec{F} = 2$, $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 0, 3x^2 - 2y)$.
- Apliquem el teorema de Gauss al domini sòlid W . Com que l'orientació demanada per a S és la normal exterior al sòlid W , la identitat $\int_{\partial W^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$ esdevé $I + I_1 + I_2 = 2 \operatorname{Vol}(W)$, essent $I_1 = \int_{T_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ i $I_2 = \int_{T_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$, on cal orientar les tapes T_1 i T_2 també per la normal exterior a W , és a dir, pels vectors $N_1 = (0, 0, -1)$ i $N_2 = (0, 0, 1)$ respectivament. Podem calcular I_1 i I_2 a partir de la component normal del camp:

$$I_j = \int_{T_j} \langle \vec{F}, N_j \rangle \, dS = \pm A(T_j), \quad j = 1, 2,$$

ja que $\langle \vec{F}, N_j \rangle = \pm 1$ (signe '−' per a $j = 1$, i signe '+' per a $j = 2$). Deduïm que $I_1 = -2\pi$ i $I_2 = 4\pi$. D'altra banda, calculem $\operatorname{Vol}(W)$ mitjançant el principi de Cavalieri: les seccions horitzontals ($z = \text{const}$) de W donen discs el·líptics de semi-eixos $\sqrt{z}$ i $2\sqrt{z}$, que tenen àrea $2\pi z$, i obtenim $\operatorname{Vol}(W) = \int_1^2 2\pi z \, dz = 3\pi$. Finalment:

$$I = 2 \operatorname{Vol}(W) - I_1 - I_2 = \boxed{4\pi}.$$

- Donat que les orientacions de ∂S i S són compatibles, i aplicant el teorema de Stokes, tenim

$$J = \int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_D \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle \, dx \, dy,$$

amb $\Phi(x, y)$ i D com a l'apartat (a), i hem tingut en compte que el vector $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-2x, -y/2, 1)$ té l'orientació contrària a la demanada per a S^+ . Tenim $\langle \operatorname{rot} \vec{F}, \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle = 3x^2 - 2y$, i observem que la integral de $-2y$ sobre D s'anul·la, per simetria. Per al terme $3x^2$, prenem coordenades polars adaptades $x = r \cos \theta$, $y = 2r \sin \theta$, amb jacobiana $2r$ i el domini $D^* = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, i obtenim:

$$J = - \int_{D^*} 3(r \cos \theta)^2 2r \, dr \, d\theta = -6 \int_1^{\sqrt{2}} r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = -6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi = \boxed{-\frac{9\pi}{2}}.$$