

Nom i cognoms:



Equacions Diferencials (240131)

Examen Parcial – 2/XI/2016

Temps: 75 min

- 1** Calculeu la massa de la cardioide $C \subset \mathbb{R}^2$ definida en coordenades polars per $r = R(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, essent R és una constant positiva, si la densitat ρ es proporcional a la distància a l'origen, amb un coeficient k .

Solució:

La parametrització de C ve donada per $\sigma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ essent $r(\theta) = R(1 + \cos \theta) = 2R \cos^2(\theta/2)$. Tenim

$$\|\sigma'(\theta)\| = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} = R\sqrt{2(1 + \cos \theta)}, \quad \rho(\theta) = k r(\theta) = kR(1 + \cos \theta).$$

Per simetria, podem restringir-nos a $\theta \in [0, \pi]$ i multiplicar el resultat per 2. En aquest interval, tenim $\cos(\theta/2) \geq 0$ i per tant podem escriure $\sqrt{1 + \cos \theta} = \sqrt{2} \cos(\theta/2)$. Per tant,

$$m(C) = \int_C \rho d\ell = 2\sqrt{2} k R^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{3/2} d\theta = 8kR^2 \int_0^\pi (1 - \sin^2(\theta/2)) \cos(\theta/2) d\theta = \frac{32}{3} k R^2.$$

- 2** Calculeu el moment d'inèrcia, respecte l'eix y , del con circular invertit de radi 1 i altura 2,

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2, 0 \leq z \leq 2\},$$

que suposem homogeni amb densitat superficial $\rho = 1$.

Solució:

L'equació de S en coordenades cilíndriques és $r = 1 - \frac{z}{2}$. Una parametrització és:

$$\varphi(\theta, z) = \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin \theta, z \right), \quad (\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

D'aquí, $\varphi_\theta = \left(-\left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin \theta, \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos \theta, 0\right)$, $\varphi_z = \left(-\frac{1}{2} \cos \theta, -\frac{1}{2} \sin \theta, 1\right)$ i $\|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = \|\varphi_\theta\| \cdot \|\varphi_z\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right)$ (ja que els vectors són ortogonals). La distància al quadrat a l'eix y és $d_y^2 = x^2 + z^2$, i avaluant-la en φ obtenim l'expressió $d_y^2(\varphi(\theta, z)) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + z^2$. Finalment:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_S d_y^2 \rho dS = \int_D d_y^2(\varphi(\theta, z)) \|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| d\theta dz = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_D \left[\left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 \cos^2 \theta + z^2 \left(1 - \frac{z}{2}\right) \right] d\theta dz \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \cdot \int_0^2 \left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 dz + 2\pi \int_0^2 z^2 \left(1 - \frac{z}{2}\right) dz \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{11\sqrt{5}}{12} \pi. \end{aligned}$$

3 Calculeu l'àrea del domini pla delimitat per un tram de la cicloide de radi 1, parametritzat per

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

i els segments OA i AB , essent $A = (0, 4)$ i $B = (\frac{\pi}{2} - 1, 1)$.

.....

Solució:

Com a conseqüència del teorema de Green, sabem que

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} (-y) dx + x dy.$$

La vora de D orientada positivament s'escriu com a $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$, on:

C_1^+ és el tram de cicloide, des de $\sigma(0) = O$ fins a $\sigma(\pi/2) = B$;

C_2^+ és el segment BA , donat per $\gamma(t) = (1-t)B + tA = ((\frac{\pi}{2} - 1)(1-t), 1+3t)$, $0 \leq t \leq 1$.

C_3^+ és el segment AO , donat per $\delta(t) = (0, 4-t)$, $0 \leq t \leq 4$.

Per a C_1^+ , calculem

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} (-y) dx + x dy &= \int_0^{\pi/2} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [-(1 - \cos t)^2 + (t - \sin t) \sin t] dt = \int_0^{\pi/2} [-2 + 2 \cos t + t \sin t] dt = -(\pi - 3), \end{aligned}$$

on hem integrat per parts. Anàlogament, per a C_2^+ obtenim

$$\int_{C_2^+} (-y) dx + x dy = \int_0^1 [(1+3t)(\frac{\pi}{2} - 1) + (\frac{\pi}{2} - 1)(1-t) \cdot 3] dt = 2\pi - 4.$$

Finalment, per a C_3 tenim $x(t) = x'(t) = 0$ i per tant $\int_{C_3^+} (-y) dx + x dy = 0$. Sumant les integrals obtingudes, resulta

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} (-(\pi - 3) + (2\pi - 4) + 0) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

4 Calculeu, mitjançant el teorema de Stokes, la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y, yz, xyz)$ al llarg de la vora de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada per la normal interior de l'el·lipsoide.

[Nota: No s'admetrà la resposta calculant amb la definició de circulació.]

.....

Solució:

Primer calculem $\text{rot } \mathbf{F} = (xz - y, -yz, -1)$. Ens mirem la corba C , vora de S , com la vora d'una altra superfície més senzilla: $\tilde{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 1, z = 0\}$, orientada pel vector normal $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$. Llavors, obtenim:

$$\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{\tilde{S}^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\tilde{S}} \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS = \text{Area}(D) = \frac{\pi}{6}.$$