

ETSEIB. EXAMEN PARCIAL D'EQUACIONS DIFERENCIALS. 6 - Abril - 2016.
ENTREGUEU ELS PROBLEMES EN FULLS SEPARATS I POSEU EL NOM

Problema 1. Sigui S_1 la superfície $x^2 + y^2 = 1$ i S_2 definida per $\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$. Denotem per C el tros de corba definit per la intersecció $S_1 \cap S_2$ i contingut en el primer octant $x, y, z \geq 0$.

- Expresseu les equacions de S_1 i S_2 en coordenades cilíndriques (r, θ, z) i obtingueu la parametrització $\sigma(\theta)$ de C .
- Si $h(x, y, z) = 1/\sqrt{1+y^2}$ calculeu $\int_C h \, d\ell$.
- Sigui $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 e^{x+y} - y, z^2 e^{x+y} + x, 2ze^{x+y})$. Calculeu la circulació $\int_C \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$ on C l'orientem segons el sentit creixent de l'angle θ . (Indicació: Escriviu $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$, per un cert potencial escalar $f(x, y, z)$ i un camp vectorial $\mathbf{G}(x, y, z)$ més senzill tal que la seva tercera component sigui igual a zero.)

Solució:

- Si fem $x = r \cos \theta$ i $y = r \sin \theta$, el cilindre S_1 esdevé $r = 1$ i l'el·lipsoide S_2 esdevé $\frac{r^2 \cos^2 \theta}{2} + r^2 \sin^2 \theta + \frac{z^2}{2} = 1$. Fent $r = 1$ en l'equació de S_2 i aïllant z , obtenim $\sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta)$, ja que $z(\theta) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{2} - \sin^2 \theta} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{2}} = \cos \theta$ amb $\theta \in [0, \pi/2]$.
- $\sigma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, -\sin \theta)$ i $\|\sigma'(\theta)\| = \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$. Per altra banda, $h(\sigma(\theta)) = 1/\sqrt{1 + \sin^2 \theta}$. Així:

$$\int_C h \, d\ell = \int_0^{\pi/2} h(\sigma(\theta)) \|\sigma'(\theta)\| \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

- És clar que podem agafar $f = z^2 e^{x+y}$ i $\mathbf{G} = (-y, x, 0)$. Usem $\sigma(0) = (1, 0, 1)$, $f(\sigma(0)) = e$, $\sigma(\pi/2) = (0, 1, 0)$, $f(\sigma(\pi/2)) = 0$, $\mathbf{G}(\sigma(\theta)) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $\sigma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, *)$ i $\langle \mathbf{G}(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle = 1$ per obtenir:

$$\begin{aligned} \int_C \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle &= f(\sigma(\pi/2)) - f(\sigma(0)) + \int_C \langle \mathbf{G}, d\vec{\ell} \rangle \\ &= f(\sigma(\pi/2)) - f(\sigma(0)) + \int_0^{\pi/2} \langle \mathbf{G}(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle \, d\theta \\ &= -e + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Problema 2. Sigui S l'esfera de radi R centrada a l'origen i orientada per la seva normal exterior. Considerem el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^n)$ amb $n \geq 1$.

- Calculeu el flux $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ sense fer servir el teorema de Gauss.
- Calculeu el flux $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ fent servir el teorema de Gauss.

Solució: a) Parametritzem l'esfera amb la longitud $\theta \in [0, 2\pi]$ i la latitud $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$. És a dir, $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ amb

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi), \quad D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Recordem que el vector diferencial de superfície associat a aquesta parametrització és

$$d\mathbf{S} = R^2 \cos \phi (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi) d\theta d\phi$$

que té l'orientació correcta.

Per tant, el flux demanat és igual a

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= R^2 \int_D \cos \phi \langle (-R \cos \phi \sin \theta, R \cos \phi \cos \theta, R^n \sin^n \phi), (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi) \rangle d\theta d\phi \\ &= R^{n+2} \int_D \sin^{n+1} \phi \cos \phi d\theta d\phi = R^{n+2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{n+1} \phi \cos \phi d\phi \\ &= 2\pi R^{n+2} \left[\frac{\sin^{n+2} \phi}{n+2} \right]_{\phi=-\pi/2}^{\phi=\pi/2} = 2\pi R^{n+2} \frac{1 - (-1)^n}{n+2} = \begin{cases} \frac{4\pi R^{n+2}}{n+2}, & \text{si } n \text{ senar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ parell.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Sigui W l'interior de l'esfera S . El teorema de Gauss diu que

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_W \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz = n \int_W z^{n-1} dx dy dz = [\text{Canvi a esfèriques}] \\ &= n \int_{W^*} r^{n-1} \sin^{n-1} \phi r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi = [\text{Fubini: } W^* = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]] \\ &= n \int_0^R r^{n+1} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{n-1} \phi \cos \phi d\phi \\ &= n \left[\frac{r^{n+2}}{n+2} \right]_{r=0}^{r=R} 2\pi \left[\frac{\sin^n \phi}{n} \right]_{\phi=-\pi/2}^{\phi=\pi/2} = n \frac{R^{n+2}}{n+2} 2\pi \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4\pi R^{n+2}}{n+2}, & \text{si } n \text{ senar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ parell.} \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 3. Aplicant el teorema de Stokes, calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F} = (y^3, z^2, x)$ al llarg de la vora de la superfície

$$S = \{(x, y, z) : y = 1 - x^2, y \geq 0, 0 \leq z \leq 3\},$$

de manera que el segment entre els punts $(1, 0, 0)$ i $(1, 0, 3)$ és recorregut de baix a dalt.

Solució: Pel teorema de Stokes, tenim $I = \oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, d\vec{S} \rangle$, on cal orientar S pel vector normal $N = (0, -1, 0)$ en qualsevol punt $(0, 1, z)$, $0 < z < 3$.

Parametritzem S com una gràfica: $\Phi(x, z) = (x, 1 - x^2, z)$, amb el domini $D = [-1, 1] \times [0, 3]$. El vector normal associat és $\Phi_x \wedge \Phi_z = (-2x, -1, 0)$, que té l'orientació que ens interessa. Usant que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (-2z, -1, -3y^2)$, calculem:

$$\begin{aligned} I &= \int_D \langle (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi, \Phi_x \wedge \Phi_z \rangle dx dz = \int_D \langle (-2z, -1, -3(1 - x^2)^2), (-2x, -1, 0) \rangle dx dz \\ &= \int_D (4xz + 1) dx dz = \text{àrea}(D) = 6, \end{aligned}$$

on hem usat que la integral de $4xz$ sobre D és 0, per simetria.