

ETSEIB. EXAMEN PARCIAL D'EQUACIONS DIFERENCIALS. 27 - Octubre - 2015.
ENTREGUEU ELS PROBLEMES EN FULLS SEPARATS I POSEU EL NOM

Problema 1.

(i) Calculeu el centre geomètric de la part dreta de l'astroide definida per

$$C = \{(x, z) \mid x^{2/3} + z^{2/3} = 1, x > 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(ii) Calculeu l'àrea de la superfície de revolució S obtinguda al girar C al voltant de l'eix OZ

Solució: (i) Usando la parametrización de la parte de astroide, $\sigma(t) = (x = \cos^3 t, z = \sin^3 t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, aplicamos la formula

$$\text{Long}(C) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sigma'(t)| dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3}{2} |\sin(2t)| dt = \frac{6}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = 3$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \cdot |\sigma'(t)| dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(t) \cdot \frac{3}{2} |\sin(2t)| dt = 6 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \cdot \sin t \cos t dt = \\ &= 6 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t dt = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Entonces, $x_{CG} = \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5}$, $CG(C) = (x = 2/5, z = 0)$ y $\text{dist}(CG(C), Z) = 2/5$.

(ii) Según el primer teorema de Guldin,

$$\text{Area}(S) = 2\pi \text{dist}(CG(C), Oz) \cdot \text{Long}(C) = 2\pi \frac{2}{5} 3 = \frac{12\pi}{5}.$$

Problema 2.

Sigui $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, $\mathbf{G} = (-y, x, z)$ i sigui S la part de la superfície $H = \{z = x^2 + y^2\}$ limitada per la condició $z \leq 3 + 2y$.

(i) Representeu S i calculeu el flux de $\mathbf{F}$ a través de S orientada segons la normal exterior, **aplicant el teorema de Stokes**.

(ii) Calculeu el camp $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, i calculeu el flux de $\mathbf{F}$ a través de S per la definició i comproveu que dóna el mateix.

Solució: (i) La frontera de S es la curva $C = H \cap \Pi$, con $\Pi = \{z = 3 + 2y\}$. Entonces, según el teorema

$$I = \oint_C \langle \mathbf{G}, \sigma'(t) \rangle dt$$

(la orientación de C debe ser compatible con la de S).

Eliminando z las ecuaciones de H y Π , obtenemos $x^2 + y^2 = 3 + 2y$, entonces la ecuación de la proyección de C sobre el plano horizontal es $x^2 + (y - 1)^2 = 4$. La última admite

parametrizaci3n $(x = 2 \cos t, y = 1 + 2 \sin t)$, y, seg3n la ecuaci3n de Π , la propia curva C tiene parametrizaci3n

$\sigma(t) = (2 \cos t, 1 + 2 \sin t, 5 + 4 \sin t)$ y $\sigma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 4 \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Observamos que la orientaci3n de C generada por $\sigma(t)$ *no* es compatible con la orientaci3n de S . Por tanto,

$$I = - \int_0^{2\pi} \langle (-1 - 2 \sin t, 2 \cos t, 5 + 4 \sin t), (-2 \sin t, 2 \cos t, 4 \cos t) \rangle dt =$$

$$- \int_0^{2\pi} [4 + 2 \sin t + 20 \cos t + 16 \sin t \cos t] dt = -8\pi.$$

(ii) Si $S: z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D = \{x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} = \text{rot} \mathbf{G} = (0, 0, 2)$, entonces

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle (0, 0, 2), (2x, 2y, -1) \rangle dxdy = -2\text{Area}(D) = -8\pi$$

Problema 3. Sigui $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{16}}}$ i sigui $S = \{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\}$.

(i) Calculeu $\int_S f dS$

(ii) Calculeu el flux de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ a trav3s de S orientada pel vector normal exterior.

(iii) Calculeu la circulaci3n de $\mathbf{F}$ al llarg de la corba $C = S \cap \{x = 0\}$ orientada en el punt $(0, 1, 0)$ pel vector tangent $(0, 0, 1)$.

Soluci3n: (i)

$$\int_S f dS = 2 \int_{\bar{S}} f dS = 2 \int_D \frac{2}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{-1/2} r dr d\theta = 8\pi$$

on hem aplicat simetria i $z = 2\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ i $\|(z_x, z_y, -1)\| = \frac{\sqrt{1+3(x^2+y^2)}}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$, $f(x, y, z(x, y)) = \frac{2}{\sqrt{1+3(x^2+y^2)}}$

(ii) Pel T. diverg3ncia

$$\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W (2 + 2z) dxdydz = 2\text{vol}(W) = 16\pi/3$$

(i apliquem $\int_W z dxdydz = 0$ per simetria)

(iii) O b3 parametritzant la corba

O b3 observant que $\text{rot} F = 0$ i pel T Stokes la circulaci3n 3s 0

O b3 observant que $\mathbf{F} = \text{grad } f$ i pel T Newton-Leibnitz la circulaci3n 3s 0.