

ETSEIB 7 Abril 2015

Examen Parcial Esg. Diferencial.

PROBLEMES. 1h 15 min.

Problema 1 Sigui S la part del cilindre el·líptic d'equació $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ que queda compresa entre els plans $y = 0, z = 0$ i $y + z = 2$. Calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 1, 0)$ a través de S , prenent com a orientació la normal exterior al cilindre.

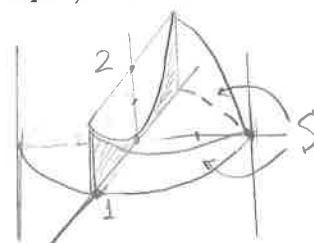
Solució. Podem escriure $S = \{(x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2 - y\}$, que podem parametritzar per $\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, 2 \sin \theta, z)$, amb el domini $D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 2 - 2 \sin \theta\}$. El vector normal associat a aquesta parametrització és $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = (2 \cos \theta, \sin \theta, 0)$, que correspon a la normal exterior al cilindre. Amb aquestes dades ja podem calcular el flux:

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \int_D \langle \vec{F}(\Phi(\theta, z)), \Phi_\theta \wedge \Phi_z \rangle d\theta dz = \int_D \sin \theta d\theta dz = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2-2\sin \theta} dz \\ &= \int_0^\pi \sin \theta \cdot (2 - 2 \sin \theta) dz = 4 - \pi. \end{aligned}$$

També es pot pensar S com la gràfica d'una funció $y = 2\sqrt{1 - x^2}$, $(x, z) \in D_1$. Llavors

$$\text{flux} = \int_{D_1} \langle (0, 1, 0), (*, 1, 0) \rangle dx dz = \text{Area}(D_1) = \text{Area}(\text{rectangle}) - \text{Area}(\text{mitja el.lipse}) = 4 - \pi$$

(Nota: Si s'apren S amb $y \leq 0$ també se li comptaria be.)



Problema 2 Donat el camp

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-yz^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{e^{\frac{-z^2}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

i la superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right\}$$

orientada per la normal interior. Calculeu el flux del rotacional de $\mathbf{F}$ a través de S .

Problema 3. Sigui W el tetraedre sòlid de $\mathbb{R}^3$ delimitat pels tres plans de coordenades i el pla $\pi \equiv x + y + z = 1$. Sigui T la base de W i $S = \partial W \setminus T$. Es a dir, T és el triangle de vèrtexos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$, mentres que S està formada per les altres tres cares del tetraedre. Calcular el flux d'un camp de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 1 + 4(1 - x)z)$$

a través de la superfície S orientada segons el vector normal exterior a W , suposant que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0.$$

Solució: Como las funciones P y Q son bastante arbitrarias, sólo seremos capaces de calcular aquellas integrales cuyos integrandos no dependan de ellas. Por eso aplicamos el teorema de Gauss, ya que

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + 4(1 - x) = 4(1 - x)$$

no depende ni de P ni de Q .

El teorema de Gauss dice que

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz.$$

Empezamos calculando la integral de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int_W \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz &= 4 \int_W (1-x) dx dy dz \\ &= 4 \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} (1-x) dz \right\} dy \right\} dx \\ &= 4 \int_0^1 (1-x) \left\{ \int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} dz \right\} dy \right\} dx \\ &= 4 \int_0^1 (1-x) \left\{ \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (1-x)^3 dx = 2 \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

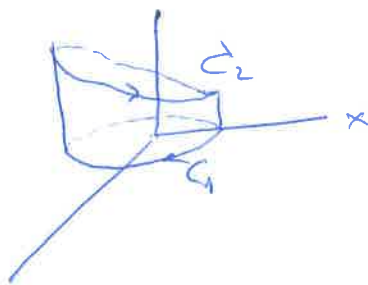
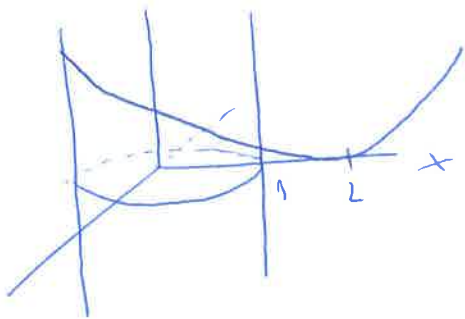
A continuación, calculamos el flujo saliente por la base T , teniendo en cuenta que el vector normal exterior en la base es igual a $\mathbf{N} = -\mathbf{k}$. Entonces, la componente normal del campo en la base tampoco depende de P o Q . Mejor aún, es constante: $F_N = \langle \mathbf{F}, -\mathbf{k} \rangle = -1 - 4z(1-x) \equiv -1$, pues $z \equiv 0$ en la base. Por tanto,

$$\int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_T F_N dS = - \int dS = - \operatorname{Area}(T) = -\frac{1}{2}.$$

Y, finalmente, calculamos el flujo saliente por S :

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz - \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2.



$$\sigma_1(t) = (cn^2, h\sqrt{t}, 0) \quad t \in [0, 2n]$$

$$\sigma_2(t) = (cn^2, h\sqrt{t}, \frac{1}{2}(5-4cn^2)) \quad t \in [0, 2n]$$

By T. Stokes

$$\int_S \langle \text{rot } \bar{F}, d\bar{S} \rangle = - \int_0^{2n} \langle F(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt + \int_0^{2n} \langle F(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned} - \langle F(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle &= - \langle (0, cn^2 h\sqrt{t}, t), (-h\sqrt{t}, cn^2, 0) \rangle = \\ &= - cn^2 L \sin^2 L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F(\sigma_2(t)), \sigma_2'(t) \rangle &= \langle (-h\sqrt{t}(z(t))^2, cn^2 h\sqrt{t}, e^{-(z(t))^2}), \\ &\quad (-h\sqrt{t}, cn^2, 2h\sqrt{t}) \rangle = \sin^2 L (z(t))^2 + cn^4 L h\sqrt{t} + \\ &\quad + 2h\sqrt{t} e^{-(z(t))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Thus } \int_S \langle \text{rot } \bar{F}, d\bar{S} \rangle &= \int_0^{2n} \sin^2 L \left(\frac{1}{4} (5-4cn^2)^2 \right) dt = \frac{29}{4} \pi \\ \int_0^{2n} h\sqrt{t} e^{-(z(t))^2} dt &= 0 \quad (\text{per symmetry}) \end{aligned}$$