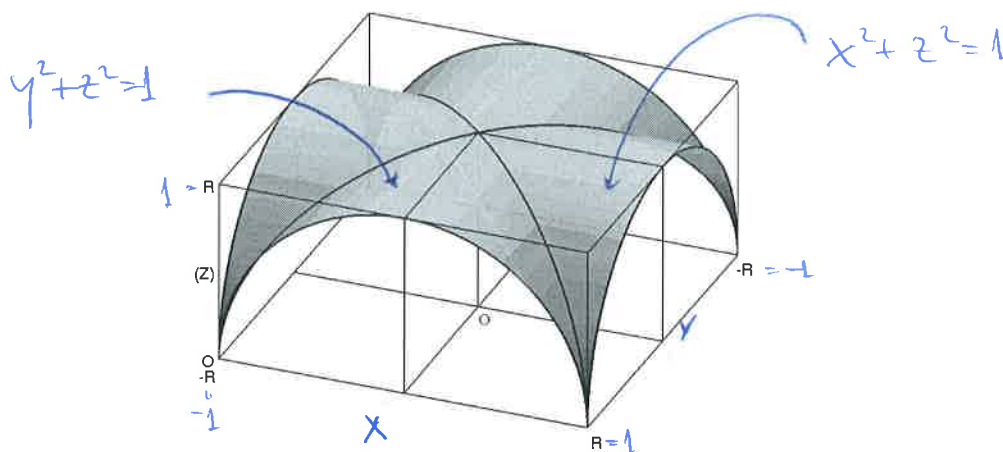


(4p)

1. Calculeu el centre geomètric de la superfície formada a partir de 2 cilindres de radi 1: $x^2 + z^2 = 1$ i $y^2 + z^2 = 1$ a la part superior, $z \geq 0$ (veure figura).



Resolució: $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned}
 A(S) &= 8 \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 8 \int_0^1 \arcsin(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ du = dx \\ u = x \end{array} \right| = \\
 &= 8 \left[x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 x(1-x^2)^{-1/2} dx \right] = 8 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 4\pi - 8. \\
 A(S)\bar{z} &= 4 \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1-y^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + 4 \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\
 &\stackrel{\text{simetria}}{=} 8 \int_0^1 dx \int_0^x dy = 4 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{\pi - 2}
 \end{aligned}$$

(2p)

2. Sigui C la corba limitada per $2x + y + 2z = 16$ i $x^2 + y^2 = 64$ orientada pel vector tangent $(0, 2, -1)$ a la corba en el punt $(8, 0, 0)$. Calculeu la circulació del camp $\vec{F} = (2x, x, z)$ al llarg de C .

Resolució: Pel t. Stokes, $\text{rot } G = (0, 0, 1)$

$$S: z = \frac{1}{2}(16 - 2x - y) \quad \forall (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 64\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\int_G \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_S \langle \text{rot } G, d\vec{S} \rangle = \int_D \langle (0, 0, 1), (1, 1/2, 1) \rangle dx dy = A(D) = 64\pi.$$

(4r) 3. Considerem el tor de revolució orientat per la normal exterior, que s'obté al fer girar, al voltant de l'eix z , la circumferència situada al pla $y = 0$ i que té per equació $(x - 2)^2 + z^2 = 1$.

- (a) Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ a través d'aquest tor usant la definició.
 (b) Calculeu el flux usant algun teorema integral

Resolució:

- (a) Parametrització de la circumferència:

$$\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{en el pla } xz$$

Parametrització del tor:

$$\varphi(t, \theta) = ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t) \quad t \in D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \varphi_t \wedge \varphi_\theta = (-\cos t \cos \theta (2 + \cos t), -\cos t \sin \theta (2 + \cos t), -\sin t (2 + \cos t))$$

Prenem $-\varphi_t \wedge \varphi_\theta$; notem que $\varphi_t \wedge \varphi_\theta \Big|_{P=\varphi(0,0)} = (-, 0, 0)$. Llavors

$$\begin{aligned} \oint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, \sin t), (*, *, \sin t(2 + \cos t)) \rangle dt d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t (2 + \cos t) dt d\theta \\ &= 2\pi \left[2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} \right] = 4\pi^2 \end{aligned}$$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}$

- (b) Pe teorema de la divergència:

$$\oint_{S=\partial W} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W dx dy dz = \text{vol}(W) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Papus-Guldin}}}{=} A(\text{cercle}) \cdot 2\pi = 4\pi^2$$