

1. Sigui C la corba de $\mathbb{R}^3$ obtinguda com a intersecció de les superfícies d'equacions $9y^2 = 16x^3$ i $z = x^2$, limitada per $0 \leq y \leq 4/3$. Suposem que té una densitat de massa $\rho(x, y, z) = 2x^2 - z$.

- (a) Indiqueu la parametrització de C , si prenem com a paràmetre la coordenada x .
 (b) Calculeu la massa de C .

Resolució:

- (a) $\sigma(x) = (x, \frac{4}{3}x^{3/2}, x^2), 0 \leq x \leq 1$
 (b) Tenim: $\sigma'(x) = (1, 2x^{1/2}, 2x)$ i per tant $\|\sigma'(x)\| = \sqrt{1 + 4x + 4x^2} = 1 + 2x$. D'altra banda, la densitat sobre C ve donada per $\rho(\sigma(x)) = x^2$.

$$\text{Massa: } m(C) = \int_C \rho d\ell = \int_0^1 x^2(1 + 2x)dx = \frac{5}{6}.$$

2. Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través de la superfície

$$S = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}, 0 \leq z \leq b \right\}, \quad a, b > 0,$$

orientada pel vector normal amb tercera component negativa.

Resolució: Opció 1: Pel teorema de divergència. $\operatorname{div} \vec{F} = 2(x + y + z)$, sigui W tal que $\partial W = S \cup T$ orientada pel vector normal exterior

$$\underbrace{\int_W \operatorname{div} \vec{F} dxdydz}_J = \underbrace{\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_I + \underbrace{\int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_K \Rightarrow I = J - K$$

$$J = 2 \int_W (x + y + z) dxdydz \stackrel{(*)}{=} 2 \int_W z dxdydz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{c.cilindriques}}}{=} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{(a/b)z} r z dr dz d\theta = \frac{a^2 b^2}{2} \pi$$

$$(*) \text{ per simetria } \int_W x dxdydz = \int_W y dxdydz = 0$$

$$K = \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \langle (x^2, y^2, b^2), (0, 0, 1) \rangle dxdy = b^2 A(x^2 + y^2 \leq a^2) = a^2 b^2 \pi.$$

$$\text{Per tant, } J = \int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \frac{a^2 b^2 \pi}{2} - a^2 b^2 \pi = -\frac{a^2 b^2}{2} \pi.$$

Opció 2: Càlcul directe de I ; sigui $k = a/b$.

$$\varphi(\theta, z) = (kz \cos \theta, kz \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [0, b]$$

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z = (kz \cos \theta, kz \sin \theta, -k^2 z),$$

amb orientació adequada.

$$\langle \vec{F}, \varphi_\theta \wedge \varphi_z \rangle = (kz \cos \theta)^2 (kz \cos \theta) + (kz \sin \theta)^2 (kz \sin \theta) + z^2 (-k^2 z)$$

$$I = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = k^2 \int_D \{kz^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - z^3\} d\theta dz$$

$$\text{Observem } \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$I = -\frac{a^2}{b^2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^b z^3 dz \right) = -\frac{a^2 b^2}{2} \pi.$$

3. Calculeu el moment d'inèrcia respecte de l'eix z de la superfície S definida per la porció del paraboloid hiperbòlic $4z = x^2 - 2y^2$ tallada pel cilindre sòlid de base el·líptica $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, suposant que la superfície és homogènia amb densitat constant ρ_0 .

Resolució: $\varphi(x, y) = (x, y, \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2)$, $(x, y) \in D = \left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$

$$\| \varphi_x \wedge \varphi_y \| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S (x^2 + y^2) \rho(x, y) dS = \int_D (x^2 + y^2) \rho_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = 2r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ \text{jacobià} = 2r \\ D^* = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \\ &= \rho_0 \int_{D^*} (4r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 + r^2} 2r dr d\theta = 2\rho_0 \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta}_{I_1} \right] \left[\underbrace{\int_0^1 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr}_{I_2} \right] \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} 4 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = 2\pi \left(4 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 5\pi$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + r^2 \\ du = 2r dr \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_1^2 (u - 1) u^{1/2} du = \frac{2}{15} \sqrt{2} + \frac{2}{15}$$

$$I_z = \frac{4\rho_0}{3} (\sqrt{2} + 1) \pi$$