

1. Considerem la corba C en el pla XZ donada per $z = x^2$, $x \in [1, 2]$. Considerem la superfície de revolució S obtinguda al girar C al voltant de l'eix X .
- (a) Doneu una parametrització de S .
- (b) Suposant que la densitat a cada punt de la superfície vé donada per $\rho(x, y, z) = \frac{k}{x}$, calculeu la massa de la superfície.

Resolució:

(a) $\varphi(x, \theta) = (x, x^2 \cos \theta, x^2 \sin \theta)$, $x \in [1, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\|\varphi_x \wedge \varphi_\theta\| = x^2 \sqrt{1 + 4x^2}$$

(b)
$$m(S) = \int_S \rho dS = k \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{x} x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx d\theta = k 2\pi \frac{1}{8} \left[\frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 =$$
$$= k \frac{\pi}{6} [17^{3/2} - 5^{3/2}].$$

2. Sigui S la superfície delimitada per $x^2 + y^2 \leq 1$ i el pla $y + z = 2$, orientada de manera que el vector normal té component en z positiva. Sigui C la corba frontera de S orientada consistentment. Es demana:
- (a) Trobeu una parametrització de S i de la corba C . Representeu-les esquemàticament indicant l'orientació de S i de la seva frontera C .
- (b) Calculeu directament la circulació del camp $\vec{F} = (z, x, y)$ sobre la corba C amb l'orientació indicada (utilitzant una parametrització de la corba C).
- (c) Calculeu

$$\int_{S^+} \langle \text{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

Resolució:

- (a) La superfície S ve donada per un tall oblicu del cilindre $x^2 + y^2 = 1$ amb el pla $y + z = 2$ i es tracta d'una el·lipse. Concretament, podem parametritzar-la com la gràfica de la funció $z = f(x, y) = 2 - y$ per a valors de (x, y) en el domini

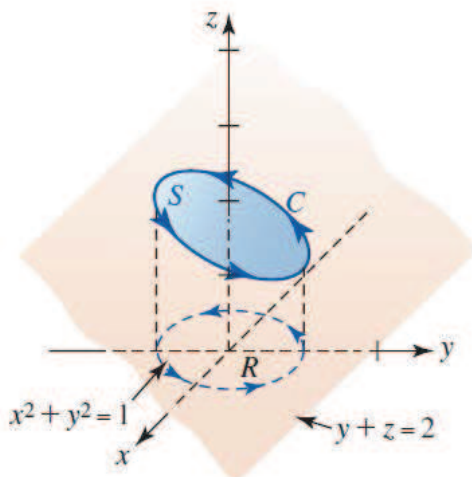
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

amb vector normal $(0, 1, 1)$.

La seva frontera, doncs, la podem parametritzar per

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

que en recórrer la corba deixa el domini a l'esquerra. La següent figura ens ho representa esquemàticament.



(b) Usant directament la definició de la circulació de $\vec{F}$ sobre C :

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_0^{2\pi} ((2 - \sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + \sin t(-\cos t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t + \sin^2 t) + \cos^2 t - \sin t(\cos t) dt = \\ &= \underbrace{-2 \int_0^{2\pi} \sin t dt}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{2\pi} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t dt}_0 = 2\pi \end{aligned}$$

(c) Un càlcul ens mostra que el rotacional de $\vec{F}$ és constant i val

$$\mathbf{rot} \vec{F} = (1, 1, 1).$$

Així doncs,

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D 1 - f_x - f_y dx dy = \int_D 2 dx dy = 2 \text{Area}(D) = 2\pi$$

o bé, pel Teorema de Stokes

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle \stackrel{(b)}{=} 2\pi$$

3. Sigui C la corba tancada en el pla XZ definida per

$$x = \cos t, \quad z = \sin(2t), \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2.$$

Sigui S la superfície que s'obté al girar C entorn de l'eix z i W el domini de $\mathbb{R}^3$ envoltat per S

- (a) Parametritzeu S .
- (b) Calculeu $I = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$, essent $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$, on S^+ correspon a l'orientació de S definida per la normal exterior.
- (c) Useu I per calcular el volum de W .

Resolució:

(a) $\varphi(t, \theta) = (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, \sin(2t)), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \theta \in [0, 2\pi]$.

(b) $\varphi_\theta \wedge \varphi_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos t \sin \theta & \cos t \cos \theta & 0 \\ -\sin t \cos \theta & -\sin t \sin \theta & 2 \cos(2t) \end{vmatrix} =$
 $= (2 \cos t \cos 2t \cos \theta, 2 \cos t \cos 2t \sin \theta, \sin t \cos t).$

Observem, per exemple, que si $\theta = 0$ i $t = \pi/4$:

$$\varphi(0, \pi/4) = (\sqrt{2}/2, 0, 1); \quad (\varphi_0 \wedge \varphi_t)(0, \pi/4) = (0, 0, 1/2).$$

Per tant $\varphi_0 \wedge \varphi_t$ apunta cap a fora de W en aquest punt de S i l'orientació que volem és la donada per $\varphi_\theta \wedge \varphi_t$

$$\langle \vec{F}(\varphi(t, \theta)), \varphi_\theta \wedge \varphi_t \rangle = \langle (0, 0, \sin(2t)), \varphi_\theta \wedge \varphi_t \rangle = \sin t \sin 2t \cos t = \frac{\sin^2(2t)}{2}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2(2t)}{2} dt \right) d\theta = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(2t) dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos(4t)) dt = \frac{\pi}{2} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$$

- (c) $\operatorname{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y + R_z = 1, \quad (P = 0), \quad Q = 0, \quad R = z$. Pel teorema de Gauss:

$$\operatorname{Vol}(W) = \int_W 1 dx dy dz = \int_W \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = I.$$