

Prueba de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 18 de abril de 2012

Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/

Tiempo: 75 minutos (3 problemas)

Algunas identidades trigonométricas. Os recordamos, por si las necesitais, las siguientes identidades:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^3 t = \frac{3 \cos t + \cos(3t)}{4}, \quad \sin^3 t = \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{4}.$$

3 puntos. Consideramos el campo

$$\mathbf{F}_\mu(x, y, z) = (yz + y + z + 1, xz + x + z + 1, xy + x + \mu y + 1),$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

1. ¿Para qué $\mu = \mu_0$ es irrotacional el campo $\mathbf{F}_\mu$? Encontrar un potencial escalar f tal que $\mathbf{F}_{\mu_0} = \text{grad } f$.
2. Calcular la circulación $\oint_C \langle \mathbf{F}_\mu, d\ell \rangle$, donde C es la curva cerrada parametrizada y orientada por

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Indicación: $\mathbf{F}_\mu = \mathbf{F}_{\mu_0} + (\mathbf{F}_\mu - \mathbf{F}_{\mu_0})$.

Solución:

1. Empezamos calculando el rotacional:

$$\text{rot } \mathbf{F}_\mu = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz + y + z + 1 & xz + x + z + 1 & xy + x + \mu y + 1 \end{vmatrix} = (\mu - 1, 0, 0).$$

Por tanto, el campo es irrotacional si y sólo si $\mu = \mu_0 := 1$. A continuación, fijamos $\mu = 1$ y buscamos el potencial escalar $f(x, y, z)$ imponiendo las condiciones

$$\partial_x f = yz + y + z + 1, \quad \partial_y f = xz + x + z + 1, \quad \partial_z f = xy + x + y + 1.$$

Integrando la primera identidad respecto x , obtenemos que $f(x, y, z) = (yz + y + z + 1)x + g(y, z)$ para alguna función $g(y, z)$. Entonces la segunda identidad implica que $xz + x + \partial_y g = xz + x + z + 1$, luego $\partial_y g = z + 1$ e integrando respecto y vemos que $g(y, z) = (z + 1)y + h(z)$ para alguna función $h(z)$. Finalmente, la tercera identidad implica que $xy + x + y + h'(z) = xy + x + y + 1$, luego $h'(z) = 1$ e integrando respecto z queda que $h(z) = z + c$, para alguna constante de integración $c \in \mathbb{R}$, que podemos tomar igual a cero. Por tanto, hemos obtenido el potencial escalar

$$f(x, y, z) = (yz + y + z + 1)x + g(y, z) = (yz + y + z + 1)x + (z + 1)y + h(z) = xyz + xy + xz + yz + x + y + z.$$

2. Sabemos que todo campo proveniente de un potencial escalar tiene circulación nula a lo largo de cualquier curva cerrada, luego

$$\begin{aligned} \oint_C \langle \mathbf{F}_\mu, d\ell \rangle &= \oint_C \langle \mathbf{F}_{\mu_0}, d\ell \rangle + \oint_C \langle \mathbf{F}_\mu - \mathbf{F}_{\mu_0}, d\ell \rangle = 0 + (\mu - \mu_0) \oint_C y dz \\ &= (\mu - 1) \int_0^{2\pi} y(t) z'(t) dt = (1 - \mu) \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{1 - \mu}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt = (1 - \mu)\pi. \end{aligned}$$

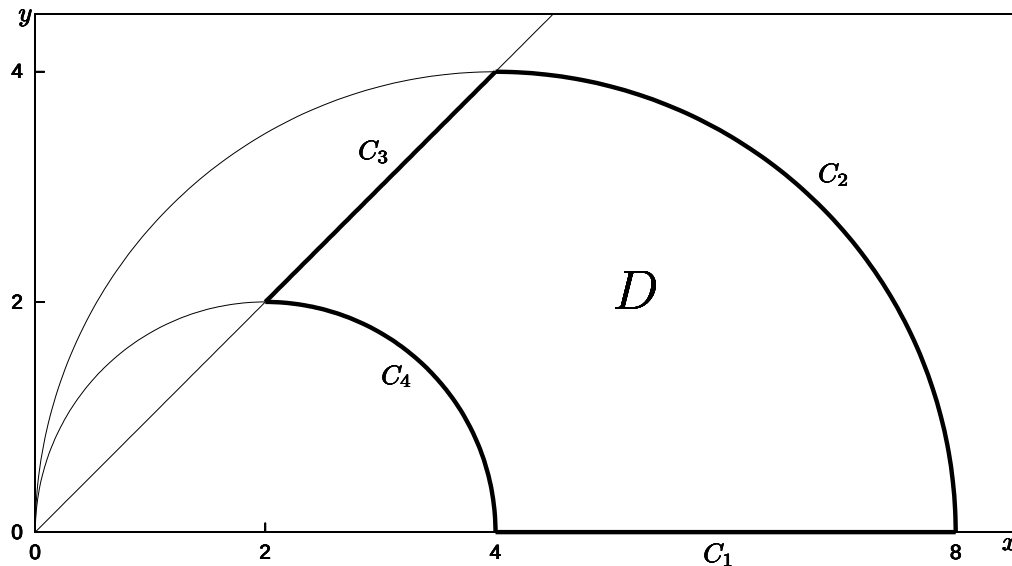
Observación: Este segundo apartado también se podría resolver aplicando el teorema de Stokes a la superficie plana

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = x\},$$

cuya frontera es la curva C , pero parece un método más complicado tanto a nivel conceptual como computacional.

3 puntos. Consideramos el dominio plano D delimitado por los dos segmentos C_1 y C_3 y por los dos cuartos de circunferencia C_2 y C_4 representados en la figura adjunta.

1. Dar una parametrización $\sigma_j : [a_j, b_j] \rightarrow C_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, de cada trozo de $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Dar el intervalo $[a_j, b_j]$ donde está definida cada parametrización.
2. Calcular el área de D usando el teorema de Green.



Solución:

1. Consideramos las siguientes parametrizaciones:
 - $C_1 = \sigma_1([4, 8])$, con $\sigma_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, 0)$.
 - $C_2 = \sigma_2([0, \pi/2])$, con $\sigma_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (4 + 4 \cos t, 4 \sin t)$.
 - $C_3 = \sigma_3([2, 4])$, con $\sigma_3(t) = (x_3(t), y_3(t)) = (t, t)$.
 - $C_4 = \sigma_4([0, \pi/2])$, con $\sigma_4(t) = (x_4(t), y_4(t)) = (2 + 2 \cos t, 2 \sin t)$.
2. No todas estas parametrizaciones tienen la orientación adecuada para aplicar directamente el teorema de Green, que requiere orientar la frontera $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ en sentido antihorario. Concretamente, C_1 y C_2 están bien orientadas, pero C_3 y C_4 no. Por tanto, aplicando Green se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(D) &= \oint_{\partial D} x dy = \int_{\sigma_1} x dy + \int_{\sigma_2} x dy - \int_{\sigma_3} x dy - \int_{\sigma_4} x dy \\
 &= \int_4^8 x_1(t) y_1'(t) dt + \int_0^{\pi/2} x_2(t) y_2'(t) dt - \int_2^4 x_3(t) y_3'(t) dt - \int_0^{\pi/2} x_4(t) y_4'(t) dt \\
 &= \int_4^8 0 dt + 16 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos t) \cos t dt - \int_2^4 t dt - 4 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos t) \cos t dt \\
 &= 0 - \left[t^2/2 \right]_{t=2}^{t=4} + 12 \int_0^{\pi/2} (\cos t + \cos^2 t) dt = -6 + 6 \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos t + \cos(2t)) dt \\
 &= -6 + 6 \left[t + 2 \sin t + \sin(2t)/2 \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = 3\pi + 6.
 \end{aligned}$$

Observación: La fórmula más usual para calcular áreas es $\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx$. Hemos usado otra fórmula para recortar el espacio ocupado, aunque las integrales finales no se simplifican.

4 puntos. Consideramos el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3, 0, y^3 - 1)$, la porción de cilindro vertical

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 + \cos x\},$$

orientada por su vector normal exterior y la curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1 + \cos x\}$$

orientada según el mismo vector normal exterior. La curva C es la parte superior de la frontera de S .

1. Calcular el flujo $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.
2. Calcular la circulación $\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle$.

Solución:

1. El campo $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, con $P(x, y, z) = y^3$, $Q(x, y, z) \equiv 0$ y $R(x, y, z) = y^3 - 1$, es solenoidal:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Por tanto, tiene flujo nulo a través de cualquier superficie cerrada. Cerramos el cilindro S añadiendo las tapas inferior y superior

$$T_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}, \quad T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 + \cos x\}.$$

Entonces, resulta que

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T_0^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 0,$$

donde la cara lateral S se orienta según su normal exterior, mientras que las tapas inferior y superior se orientan según su normal de componente vertical negativa y positiva, respectivamente.

La tapa T_1 es la gráfica de $z = f_1(x, y) = 1 + \cos x$ sobre el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{T_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_D [R(x, y, f_1(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))\partial_x f_1(x, y) - Q(x, y, f_1(x, y))\partial_y f_1(x, y)] dx dy \\ &= \int_D y^3(1 + \sin x) dx dy - \int_D dx dy = 0 - \operatorname{Area}(D) = -\pi. \end{aligned}$$

La integral $\int_D y^3(1 + \sin x) dx dy$ es igual a cero, pues el disco D es simétrico respecto al eje $\{y = 0\}$ y la función $y^3(1 + \sin x)$ es impar en la variable y . La tapa T_1 está bien orientada, pues vimos en clase que el vector normal asociado a la parametrización $\varphi_1 : D \rightarrow T_1$, $\varphi_1(x, y) = (x, y, f_1(x, y))$, siempre tiene componente vertical positiva.

Calculamos el flujo a través de la tapa inferior T_0 mediante el mismo proceso, pero cambiando el signo del resultado, pues ahora queremos que el vector normal tenga la componente vertical negativa. La tapa T_0 es la gráfica de $z = f_0(x, y) \equiv 0$ sobre el mismo disco D . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{T_0^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= - \int_D [R(x, y, f_0(x, y)) - P(x, y, f_0(x, y))\partial_x f_0(x, y) - Q(x, y, f_0(x, y))\partial_y f_0(x, y)] dx dy \\ &= \int_D dx dy - \int_D y^3 dx dy = \operatorname{Area}(D) - 0 = \pi. \end{aligned}$$

La integral $\int_D y^3 dx dy$ es igual a cero, pues el disco D es simétrico respecto al eje $\{y = 0\}$ y la función y^3 es impar en la variable y .

Finalmente, $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{T_0^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle - \int_{T_1^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -(\pi - \pi) = 0$.

2. Recordamos que S^+ es la orientación de la cara lateral que se corresponde con la normal exterior, mientras que T_1^+ es la orientación de la tapa superior que se corresponde con la normal de componente vertical positiva. La orientación de $C \subset \partial S$ compatible con S^+ es opuesta a la orientación de $C = \partial T_1$ compatible con T_1^+ . Notamos por C^+ a la primera orientación y por C^- a la segunda. Por tanto, aplicando el teorema de Stokes obtenemos que la circulación pedida es

$$\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = - \oint_{C^-} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = - \int_{T_1^+} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

Empezamos calculando el rotacional: $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (3y^2, 0, -3y^2) = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$. Recordamos que T_1 es la gráfica de $z = f_1(x, y) = 1 + \cos x$ sobre el disco unidad D , luego

$$\begin{aligned} \int_{T_1^+} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_D [\tilde{R}(x, y, f_1(x, y)) - \tilde{P}(x, y, f_1(x, y))\partial_x f_1(x, y) - \tilde{Q}(x, y, f_1(x, y))\partial_y f_1(x, y)] dx dy \\ &= 3 \int_D y^2 \sin x dx dy - 3 \int_D y^2 dx dy = 0 - 3 \int_{D^*} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta \\ &= -3 \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) = -3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

La integral $\int_D y^2 \sin x dx dy$ es igual a cero, pues el disco D es simétrico respecto al eje $\{x = 0\}$ y la función $y^2 \sin x$ es impar en la variable x .

Finalmente, la circulación que nos piden es $\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = -(-3\pi/4) = 3\pi/4$.