

Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 29 de octubre de 2012 Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/ Tiempo: 75 minutos (3 problemas)

Observación. Las puntuaciones de los tres problemas suman 11 puntos, pero 10 puntos es la nota máxima.

Problema 1 [3.5 puntos]. Consideramos la curva

$$C = \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \frac{2}{3}r^{3/2}, 0 \leq r \leq 3 \right\}$$

con la densidad

$$\rho(r, z) = \frac{1}{\sqrt{1+r}}.$$

1. Calcular la masa de la curva C .
2. Calcular el centro de masas de la curva C .
3. Calcular el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva C respecto al eje vertical z .

Solución:

1. La curva C es la gráfica de la función $z = f(r) = 2r^{3/2}/3$ sobre el intervalo $I = [0, 3]$, luego su elemento de longitud es $d\ell = \sqrt{1 + (f'(r))^2}dr = \sqrt{1+r}dr$. Por tanto, la masa de la curva es

$$m(C) = \int_C \rho d\ell = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sqrt{1+r} dr = \int_0^3 dr = 3.$$

2. Encontramos el centro de masas $\text{CM}(C) = (\bar{r}, \bar{z})$ aplicando directamente la definición

$$\bar{r} = \frac{1}{m(C)} \int_C r \rho d\ell = \frac{1}{3} \int_0^3 r \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sqrt{1+r} dr = \frac{1}{3} \int_0^3 r dr = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=3} = \frac{3}{2},$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(C)} \int_C z \rho d\ell = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{2}{3} r^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sqrt{1+r} dr = \frac{2}{9} \int_0^3 r^{3/2} dr = \frac{2}{9} \left[\frac{2}{5} r^{5/2} \right]_{r=0}^{r=3} = \frac{2}{9} \frac{2}{5} 3^{5/2} = \frac{4}{5} \sqrt{3}.$$

3. Parametrizamos la superficie de revolución S obtenida al girar la curva C mediante la distancia al eje de revolución $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, 3]$ y la longitud $\theta \in [0, 2\pi]$. Es decir, $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$, donde

$$D = [0, 3] \times [0, 2\pi], \quad \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, f(r)), \quad f(r) = 2r^{3/2}/3.$$

Vimos en clase que el elemento de superficie asociado a este tipo de parametrización es

$$dS = \|\varphi_r \wedge \varphi_\theta\| dr d\theta = \sqrt{1 + (f'(r))^2} r dr d\theta = \sqrt{1+r} r dr d\theta.$$

Por tanto, el área (¡ojo!, queremos calcular el área, no la masa) de la superficie es

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_S dS = \int_D \sqrt{1+r} r dr d\theta = \left(\int_0^3 \sqrt{1+r} r dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5} (1+r)^{5/2} - \frac{2}{3} (1+r)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=3} = 2\pi \left(\frac{2}{5} 31 - \frac{2}{3} 7 \right) = 2\pi \frac{116}{15} = \frac{232\pi}{15}. \end{aligned}$$

Problema 2 [3.5 puntos]. Consideramos el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2y^2 + 3x^2z, 2x^3y + 2yz, x^3 + y^2)$ y la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 + 2x^2 + y^2/2, 0 \leq z \leq 4\}.$$

1. Calcular el rotacional del campo $\mathbf{F}$ y la circulación $\oint_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle$, orientando ∂S según el vector normal $\mathbf{N}(x, y, z) = (4x, y, -1)$.
2. Comprobar que el campo $\mathbf{F}$ proviene de un potencial escalar y calcular la circulación $\int_C \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle$, donde C es la curva contenida en la superficie S parametrizada por
$$\sigma(t) = ((\cos t + \sin t) \cos t, 2(\cos t + \sin t) \sin t, 1 + 2 \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$$
3. ¿Qué se puede decir sobre la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en la superficie S ? ¿Y si la curva es cerrada, pero no está contenida en la superficie S ? Justificar las respuestas.

Solución:

1. Calculamos el rotacional del campo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2 + 3x^2z & 2x^3y + 2yz & x^3 + y^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Por tanto, $\mathbf{F}$ es un campo irrotacional definido en todo $\mathbb{R}^3$. Recordamos el corolario del teorema de Stokes donde se establece que todo campo irrotacional 3D tiene circulación nula a lo largo de cualquier curva cerrada que delimite una superficie contenida en el abierto donde está definido el campo. En este caso, el campo $\mathbf{F}$ está definido en todo $\mathbb{R}^3$, luego

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = 0.$$

La orientación no importa, pues la circulación da cero.

2. Buscamos un potencial escalar $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$; es decir, necesitamos que

$$f_x = 3x^2y^2 + 3x^2z, \quad f_y = 2x^3y + 2yz, \quad f_z = x^3 + y^2.$$

Integrando la última identidad respecto a la variable z , vemos que $f(x, y, z) = x^3z + y^2z + g(x, y)$, siendo g una función a determinar. A continuación, la segunda identidad se convierte en $g_y(x, y) + 2yz = f_y = 2x^3y + 3yz$, luego integrando respecto a la variable y resulta que $f(x, y, z) = x^3z + y^2z + g(x, y) = x^3z + y^2z + x^3y^2 + h(x)$, siendo h una función a determinar. Finalmente, la primera identidad pasa a ser $h'(x) = 0$, luego $h(x) = c$, siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante de integración arbitraria que podemos escoger que sea igual a cero. Es decir, $f(x, y, z) = x^3z + y^2z + x^3y^2$ es el potencial escalar que buscábamos. Una vez llegados aquí, basta aplicar Newton-Leibniz:

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = \int_C \langle \operatorname{grad} f, d\boldsymbol{\ell} \rangle = f(\sigma(\pi/4)) - f(\sigma(0)) = f(1, 2, 3) - f(1, 0, 1) = 19 - 1 = 18.$$

3. Recordamos el corolario del teorema de Newton-Leibniz donde se establece que todo campo que proviene de un potencial escalar tiene circulación nula a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en el abierto donde el campo está definido. En este caso, el campo $\mathbf{F}$ está definido en todo $\mathbb{R}^3$, luego $\oint_C \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = 0$ para toda curva cerrada $C \subset \mathbb{R}^3$, tanto si C está contenida en S como si no.

Problema 3 [4 puntos]. Consideramos el campo $\mathbf{G}(x, y, z) = (y^2z, yz, z - xy)$.

1. Calcular el campo $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ y comprobar que $\mathbf{F}$ es un campo solenoidal (divergencia nula).
2. Calcular el flujo $\int_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$, donde W es la región de $\mathbb{R}^3$ dada por
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 4, x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \leq 4\}$$
y la frontera ∂W está orientada según el vector normal exterior a la región W .
3. Calcular el flujo $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$, donde la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \leq 1\}$$
está orientada según el vector normal unitario exterior.
4. Calcular la circulación $\oint_C \langle \mathbf{G}, d\ell \rangle$ a lo largo de la frontera $C = \partial S$ orientada según el mismo vector normal exterior del apartado anterior.

Solución:

1. Calculamos el rotacional:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{G}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z & yz & z - xy \end{vmatrix} = (-x - y, y + y^2, -2yz).$$

Y para comprobar que $\mathbf{F}$ es solenoidal basta calcular su divergencia: $\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = -1 + (1 + 2y) - 2y = 0$.

2. Recordamos el corolario del teorema de Gauss donde se establece que todo campo solenoidal 3D tiene flujo nulo a través de cualquier superficie que encierre una región contenida en el abierto donde está definido el campo. En este caso, el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x - y, y + y^2, -2yz)$ está definido en todo $\mathbb{R}^3$, luego

$$\int_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 0.$$

3. Calculamos el flujo $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ buscando una tapa T tal que la unión $S \cup T$ encierre una región $V \subset \mathbb{R}^3$ y aplicando el teorema de Gauss a la región V . Escogemos la tapa contenida en el plano vertical $\{x = 1\}$ dada por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 3, x = 1\}.$$

Esta tapa es un disco de radio $\sqrt{3}$. Por tanto, aplicando el teorema de Gauss en la región V obtenemos que

$$0 = \int_V \text{div } \mathbf{F} dx dy dz = \oint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \Rightarrow \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

El teorema de Gauss exige que la orientación positiva T^+ corresponda a orientar la tapa según el vector normal unitario exterior a la región V , luego el vector normal unitario sobre la tapa es $\mathbf{N} = \mathbf{i}$ y la componente normal del campo $\mathbf{F}$ sobre la tapa es

$$F_N = \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = \langle (-x - y, y + y^2, -2yz), (1, 0, 0) \rangle = -x - y = -1 - y,$$

pues estamos en el plano $\{x = 1\}$. Así pues, vemos que

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_T F_N dS = \int_T dS + \int_T y dS = \text{Area}(T) = 3\pi.$$

Hemos usado que el disco T es simétrico respecto la recta $\{y = 0, x = 1\}$, luego $\int_T y dS = 0$.

4. Aplicamos el teorema de Stokes y usamos el resultado anterior para calcular la circulación pedida:

$$\oint_{C^+} \langle \mathbf{G}, d\ell \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 3\pi.$$