

Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 12 de abril de 2012

Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/

Tiempo: 75 minutos

Nombre:

Apellidos:

Observación. Las puntuaciones de los cuatro problemas suman 11, pero 10 es la nota máxima.

Algunas identidades trigonométricas. Os recordamos, por si las necesitais, las siguientes identidades:

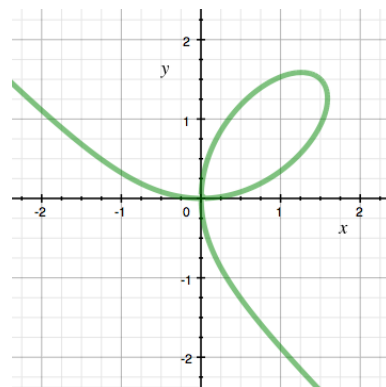
$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^3 t = \frac{3 \cos t + \cos(3t)}{4}, \quad \sin^3 t = \frac{3 \sin t - \sin(3t)}{4}.$$

2 puntos. El *folium de Descartes* es la curva plana definida por la ecuación implícita $x^3 + y^3 = 3xy$, ver la figura adjunta. Sea C la parte del folium contenida en el primer cuadrante, la cual es una curva cerrada simple parametrizada por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

En particular, $\sigma(0) = (0, 0)$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = (0, 0)$.

1. Marcar el sentido en que la parametrización $\sigma(t)$ recorre la curva C en la figura. Justificar la respuesta.
2. Calcular el área del dominio plano encerrado por C .



Solución: El vector tangente $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$ viene dado por

$$x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Por tanto, $\sigma'(1) = (-3/4, 3/4)$ es el vector tangente en el punto $\sigma(1) = (3/2, 3/2)$ de la bisectriz del primer cuadrante, luego la parametrización recorre la curva en sentido antihorario.

Sea D el dominio plano encerrado por C . Aplicando Green obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x(y)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{9t^2(2-t^3-1+2t^3)}{(1+t^3)^3} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3}{2} \left[\frac{-1}{1+t^3} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3 puntos. Sea C la curva cerrada obtenida al intersectar el paraboloide circular $P \equiv z = x^2 + y^2$ y el plano $\Pi \equiv z = mx$, siendo $m \in \mathbb{R}$ un parámetro. Orientamos esta curva de forma que se recorre en sentido antihorario cuando la observamos desde un punto situado por encima de ella.

1. Calcular la circulación $\oint_C y dz$ a partir de la definición.
2. Calcular la circulación $\oint_C y dz$ usando Stokes.

Solución: La proyección sobre el plano horizontal $\{z = 0\}$ de la intersección $C = P \cap \Pi$ es la circunferencia de radio $m/2$ y centro $(m/2, 0)$, pues

$$(x, y, z) \in C \Rightarrow x^2 + y^2 = z = mx \Rightarrow (x - m/2)^2 + y^2 = (x^2 - mx + m^2/4) + y^2 = m^2/4.$$

Por tanto, una parametrización que tiene la orientación adecuada es $C = \sigma([0, 2\pi])$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde

$$x(t) = \frac{m(1 + \cos t)}{2}, \quad y(t) = \frac{m \sin t}{2}, \quad z(t) = mx(t) = \frac{m^2(1 + \cos t)}{2}.$$

Calculamos la circulación a partir de la definición:

$$\oint_C y dz = \int_0^{2\pi} y(t) z'(t) dt = -\frac{m^3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\frac{m^3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -\frac{m^3}{4} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = -m^3 \pi/4.$$

Para aplicar Stokes necesitamos un campo y una superficie orientada de forma compatible con la curva C . El campo sólo puede ser $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, y)$. Su rotacional es constante: $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \equiv (1, 0, 0)$. Escogemos como superficie S la porción del plano Π delimitada por C y debemos orientarla tomando un vector normal con componente vertical positiva. La superficie S es la gráfica de la función $z = f(x, y) = mx$ sobre el círculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - m/2)^2 + y^2 \leq m^2/4\}$. En particular, el vector diferencial de superficie es $d\mathbf{S} = (-f_x, -f_y, 1) dx dy = (-m, 0, 1) dx dy$, lo cual confirma que la parametrización tiene la orientación adecuada. Por tanto,

$$\oint_C y dz = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle (1, 0, 0), (-m, 0, 1) \rangle dx dy = -m \int_D dx dy = -m \text{Area}(D) = -m^3 \pi/4.$$

2 puntos. Calcular el promedio de la función suma $x + y + z$ de tres números no negativos $x, y, z \geq 0$, tales que la suma de sus cuadrados es igual a uno: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: Parametrizamos el primer octante de esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0\}$ mediante la longitud $\theta \in [0, \pi/2]$ y la latitud $\phi \in [0, \pi/2]$; es decir, consideramos la parametrización

$$S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi), \quad D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

El octante tiene radio uno, luego $\text{Area}(S) = 4\pi/8 = \pi/2$ y el elemento diferencial de superficie es $dS = \cos \phi d\theta d\phi$. Finalmente, calculamos el promedio de la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$, aplicando la definición:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{\int_S f dS}{\text{Area}(S)} = \frac{2}{\pi} \int_D (\cos \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta + \sin \phi) \cos \phi d\theta d\phi = \frac{2}{\pi} \int_D (\cos^2 \phi (\cos \theta + \sin \theta) + \cos \phi \sin \phi) d\theta d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sin \theta - \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left[\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{2}{\pi} 2 \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4 puntos. Sea S la superficie de revolución obtenida al girar la semicircunferencia

$$C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x - R_1)^2 + z^2 = R_2^2, x \geq R_1\}, \quad 0 < R_2 < R_1,$$

alrededor del eje z , orientada según el vector normal “exterior”; es decir, el vector normal que se aleja del eje z . Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

1. Calcular el flujo $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ aplicando Gauss en la región adecuada.
2. Calcular el flujo $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ a partir de la definición.

Solución: Para aplicar Gauss necesitamos cerrar la superficie S . Por ejemplo, podemos considerar la tapa cilíndrica

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R_1^2, -R_2 \leq z \leq R_2\}.$$

(Otra opción, quizá más simple, es considerar dos tapas planas: $T_{\pm} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \pm R_2, x^2 + y^2 \leq R_1^2\}$.)

El campo $\mathbf{F}$ es solenoidal, luego aplicando Gauss a la región $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\partial W = S \cup T$, vemos que

$$0 = \int_W \text{div } \mathbf{F} dx dy dz = \int_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle,$$

donde S^+ está orientada por la normal exterior, mientras que T^+ está orientada por la normal interior. El vector normal unitario interior a la tapa cilíndrica es $\mathbf{N}(x, y, z) = (-x, -y, 0)/R_1$, luego la componente normal interior del campo es:

$$F_N = \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = \langle (x, y, -2z), (-x, -y, 0)/R_1 \rangle = -(x^2 + y^2)/R_1 \equiv -R_1.$$

Por tanto, obtenemos que

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_T F_N dS = R_1 \int_T dS = R_1 \text{Area}(T) = 4\pi R_1^2 R_2.$$

Consideramos la parametrización de la semicircunferencia $C = \sigma([- \pi/2, \pi/2])$, $\sigma(t) = (r(t), z(t))$, donde

$$r(t) = R_1 + R_2 \cos t, \quad z(t) = R_2 \sin t.$$

La parametrización anterior es la base para parametrizar la superficie de revolución:

$$S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t, \theta) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t)), \quad D = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

El producto vectorial de sus derivadas parciales es

$$\varphi_t \wedge \varphi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r'(t) \cos \theta & r'(t) \sin \theta & z'(t) \\ -r(t) \sin \theta & r(t) \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r(t) (-z'(t) \cos \theta, -z'(t) \sin \theta, r'(t)).$$

Esta parametrización tiene la orientación opuesta a la que queremos, pues $z'(t) = R_2 \cos t \geq 0$ para todo $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Además, el vector diferencial de superficie es $d\mathbf{S} = (\varphi_t \wedge \varphi_\theta) dt d\theta$, luego

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= - \int_D \left\langle (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, -2z(t)), r(t) (-z'(t) \cos \theta, -z'(t) \sin \theta, r'(t)) \right\rangle dt d\theta \quad [\text{Fubini}] \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2(t) z'(t) + 2z(t) r(t) r'(t)) dt \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(R_1^2 R_2 \cos t + 2R_1 R_2^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) + R_2^3 (\cos^2 t - 2 \sin^2 t) \cos t \right) dt \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(R_1^2 R_2 \cos t + 2R_1 R_2^2 \cos(2t) + R_2^3 (3 \cos^3 t - 2 \cos t) \right) dt \\ &= 2\pi \left[R_1^2 R_2 \sin t + R_1 R_2^2 \sin(2t) + R_2^3 (\sin t - \sin(3t))/4 \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = 4\pi R_1^2 R_2. \end{aligned}$$