

Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 31 de octubre de 2011

Depositado en www.ma1.upc.edu/~ed/

Tiempo: 75 minutos

Nombre:

Apellidos:

2.5 puntos. Calcular el momento de inercia de una esfera hueca de radio R y densidad superficial constante $\rho \equiv \rho_0$ respecto un eje que pasa por su centro.

Indicación: Podeis usar, sin probarlo, que $4 \cos^3 \phi = 3 \cos \phi + \cos(3\phi)$.

Solución: Suponemos que la esfera tiene su centro en el origen: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ y la parametrizamos usando la longitud y la latitud: $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$, donde

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, R \sin \phi), \quad D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Entonces sabemos que el elemento de superficie es $dS = R^2 \cos \phi \, d\theta \, d\phi$.

También podemos suponer que el eje de giro es el eje z , luego el momento de inercia es

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S (x^2 + y^2) \rho \, dS = \rho_0 \int_S (x^2 + y^2) \, dS = \rho_0 \int_D R^2 \cos^2 \phi R^2 \cos \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= R^4 \rho_0 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \phi \, d\phi \right) = 2\pi R^4 \rho_0 \left[\frac{3 \sin \phi}{4} + \frac{\sin(3\phi)}{12} \right]_{\phi=-\pi/2}^{\phi=\pi/2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) 2\pi R^4 \rho_0 = \frac{8\pi R^4 \rho_0}{3}. \end{aligned}$$

3 puntos. Sea S la superficie de revolución obtenida al girar la curva

$$C = \{(r, z) : a \leq r \leq b, z = 1/(1+r^2)\}, \quad 0 < a < b,$$

alrededor del eje z , orientada según la normal con componente vertical positiva.

1. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz^3, 3x^2z^2, 3x^2 + 3y^2)$. Calcular el flujo $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ aplicando directamente la definición.
2. Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 tal que $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Calcular la circulación $\oint_{\partial S} \langle \mathbf{G}, d\ell \rangle$.

Solución: Consideramos la parametrización $S = \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z(r)), \quad z(r) = 1/(1+r^2), \quad D = [a, b] \times [0, 2\pi].$$

El producto vectorial de sus derivadas parciales es

$$\varphi_r \wedge \varphi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & z'(r) \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r(-z'(r) \cos \theta, -z'(r) \sin \theta, 1).$$

Por tanto, esta parametrización tiene la orientación que queremos, pues la tercera componente de $\varphi_r \wedge \varphi_\theta$ es positiva. Además, el vector diferencial de superficie es $d\mathbf{S} = (\varphi_r \wedge \varphi_\theta) dr d\theta$, luego

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \int_D \left\langle (2r \sin \theta (z(r))^3, 3r^2 \cos^2 \theta (z(r))^2, 3r^2), r(-z'(r) \cos \theta, -z'(r) \sin \theta, 1) \right\rangle dr d\theta \quad [\text{Fubini}] \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^3 dr - 2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_a^b r^2 (z(r))^3 z'(r) dr - 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_a^b r^3 (z(r))^2 z'(r) dr \\ &= 6\pi \left[r^4/4 \right]_{r=a}^{r=b} - 2 \left[-\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_a^b r^2 (z(r))^3 z'(r) dr - 3 \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_a^b r^3 (z(r))^2 z'(r) dr \\ &= 3\pi(b^4 - a^4)/2. \end{aligned}$$

A continuación, aplicando Stokes, resulta que

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{G}, d\ell \rangle = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 3\pi(b^4 - a^4)/2.$$

1.5 puntos. Calcular el promedio de la suma $x + y$ de dos números no negativos $x, y \geq 0$, tales que la suma de sus cuadrados es igual a uno: $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Parametrizamos el primer cuadrante de circunferencia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0\}$ mediante

$$C = \sigma([0, \pi/2]) \subset \mathbb{R}^2, \quad \sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Buscamos el promedio de la función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$, sobre C . Aplicando la definición de promedio vemos que

$$\bar{f} = \frac{\int_C f d\ell}{\text{Long}(C)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\sigma(\theta)) \|\sigma'(\theta)\| d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\sin \theta - \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

1.5 puntos. Sea C la frontera del dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ obtenido al quitar tres discos de radio uno con centros en $(-3, 0)$, $(0, 0)$ y $(3, 0)$ del disco de radio diez centrado en $(1, 0)$. Calcular la circulación

$$\int_C (y + x^3 \cos(x^2)) dx + (e^{y^2} + 2x) dy$$

orientando la mayor circunferencia de C en sentido horario y las tres menores en sentido antihorario.

Solución: En primer lugar, si $C^+ = \partial D$ está orientada según el vector $\mathbf{k}$, entonces la orientación que nos piden es C^- . Sea $P(x, y) = y + x^3 \cos(x^2)$ y $Q(x, y) = e^{y^2} + 2x$. Aplicando Green sabemos que

$$\int_{C^-} P dx + Q dy = - \int_{C^+} P dx + Q dy = - \int_D (Q_x - P_y) dx dy = - \int_D dx dy = - \text{Area}(D) = -(\pi 10^2 - \pi - \pi - \pi) = -97\pi.$$

3 puntos. Sea $S = S_1 \cup S_2$ la superficie regular a trozos dada por

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 2\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orientada en el punto $(0, 0, 1)$ por el vector normal unitario $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 1 + xz)$.

1. Dibujar la superficie S .
2. Calcular $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.

Solución: La superficie S es abierta, pero podemos cerrarla si consideramos la tapa plana

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aplicando Gauss a la región $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\partial W = S \cup T$, vemos que

$$3 \int_W x dx dy dz = \int_W \text{div } \mathbf{F} dx dy dz = \int_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

La región W es simétrica respecto al plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, luego $\int_W x dx dy dz = 0$ y entonces

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{T^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{T^-} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

La superficie T es la gráfica de la función $z = f(x, y) = -1$ sobre el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, luego podemos parametrizarla mediante la aplicación $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, -1)$. Entonces el vector diferencial de superficie es $d\mathbf{S} = (-f_x, -f_y, 1) dx dy = \mathbf{k} dx dy$. Esta parametrización ya tiene la orientación negativa T^- que queremos, pues el vector normal unitario $\mathbf{k}$ apunta hacia el interior de la región W cuando estamos sobre la tapa. Por tanto, usando que $z \equiv -1$ en la tapa, obtenemos que

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_{T^-} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_D \langle (x^2, 0, 1 - x), (0, 0, 1) \rangle dx dy = \int_D dx dy + \int_D x dx dy = \text{Area}(D) + 0 = \pi.$$

Aquí hemos usado que el disco D es simétrico respecto la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, luego $\int_D x dx dy = 0$.
