

Equacions diferencials GETI (240131)

Examen – 21 de gener de 2026

Temps: 3h (la part test es recollirà 15 min abans d'acabar les 3 hores)

.....

Instruccions: Aquest examen consta d'una part de preguntes test i una part de problemes:

- **Test (T1 - T7): respostes correctes 1 punt, incorrectes -0.20 punts** (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes. La part de test es recollirà 15 min abans de la finalització de l'examen.
Molt important: marqueu les vostres respostes a la graella que teniu a final dels enunciats. És el que es farà servir per a la correcció automàtica. En cas de discrepància amb possibles marques al text, és la que es donarà per definitiva.
- **Problemes (P1-P2):** La puntuació de cada pregunta està indicada a l'enunciat corresponent. Responen de manera concisa però justificant els passos importants.

Escriviu el vostre nom i cognoms, en majúscules, a cada un dels fulls. Es pot dur formulari si segueix les condicions publicades a Atenea. Les notes provisionals, resolució, data de revisió, etc, sortiran publicades a Atenea.

TEST

T1. (1 punt) Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ al llarg de la corba C , que és la intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ amb el pla $x + y + z = 0$. La corba està orientada en sentit antihorari vista des del punt $(1, 1, 1)$.

- (a) πa^2
- (b) $-2\pi a^2$
- (c) 0
- (d) $-\frac{2\pi a^3}{\sqrt{3}}$
- (e) Cap de les anteriors

Solució: Per calcular la circulació del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ al llarg de la corba intersecció C , apliquem el Teorema de Stokes, que relaciona la integral de línia amb el flux del rotacional a través d'una superfície S que tingui C com a frontera: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$. En aquest cas, la superfície més convenient és el disc S amb vora definida per la intersecció de l'esfera i el pla $x + y + z = 0$.

Primer, calculem el rotacional del camp vectorial:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y)$$

La superfície S és un disc contingut en el pla $x + y + z = 0$. El vector normal unitari a aquest pla, seguint l'orientació antihorària vista des de $(1, 1, 1)$, és $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. El producte escalar entre el rotacional i el vector normal és:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2z - 2x - 2y) = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z)$$

Atès que per a tots els punts de la superfície S es compleix l'equació del pla $x + y + z = 0$, el producte escalar és idènticament zero en cada punt del disc:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(0) = 0$$

En conseqüència, la integral de flux del rotacional sobre la superfície S s'anul·la completament:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S 0 \, dS = 0$$

D'aquesta manera, concloem que la circulació del camp vectorial al llarg de la corba C és zero. Aquest resultat és coherent amb el fet que el component del rotacional normal a la superfície equipotencial del pla és nul.

T2. (1 punt) L'àrea d'una tanca de base $C = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, a \neq 1 \right\}$ i alçada determinada per la superfície $z = xy$ és:

- (a) $\frac{a}{3} \cdot \frac{a^3 + 2a + 1}{a^2 - 1}$
- (b) $\frac{a}{3}$
- (c) $\frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$
- (d) $\frac{a}{3} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$.**
- (e) Cap de les anteriors

Solució: L'àrea demanada correspon a

$$\text{Àrea} = \int_C xy \, d\ell$$

Si parametritzem C per $\gamma(\theta) = (a \cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, \pi/2]$, tenim que

$$\int_C xy \, d\ell = \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \|\gamma'(\theta)\| \, d\theta = \int_0^{\pi/2} a \sin \theta \cdot \cos \theta \sqrt{a^2 + (1 - a^2) \cos^2 \theta} \, d\theta,$$

on hem fet servir que $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Per a calcular la primitiva

$$\int a \sin \theta \cdot \cos \theta \sqrt{a^2 + (1 - a^2) \cos^2 \theta} \, d\theta$$

podem aplicar el canvi $u = a^2 + (1 - a^2) \cos^2 \theta \Rightarrow du = -2(1 - a^2) \cos \theta \sin \theta$, que la converteix en

$$-\frac{a}{3(1 - a^2)} \int \sqrt{u} \, du = -\frac{a}{3(1 - a^2)} (a^2 + (1 - a^2) \cos^2 \theta)^{3/2} + k.$$

Aplicant Barrow, es dedueix que

$$\int_0^{\pi/2} a \sin \theta \cdot \cos \theta \sqrt{a^2 + (1 - a^2) \cos^2 \theta} \, d\theta = -\frac{a}{3(1 - a^2)} (a^3 - 1) = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a + 1},$$

on hem tingut en compte que $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$.

T3. (1 punt) Considereu la corba $C = (y = x^2, x \in [0, 1])$ i siguin: S_{OY} la superfície de revolució obtinguda al revolucionar C respecte de l'eix OY ; i S_{OX} la superfície que s'obté al fer-ho respecte de l'eix OX . Aleshores:

- (a) Ambdues superfícies tenen el mateix àrea.
- (b) L'àrea de S_{OY} és més petita que l'àrea de S_{OX} .
- (c) L'àrea de S_{OX} és més petita que l'àrea de S_{OY} .**
- (d) L'àrea de S_{OX} és més gran (estrictament) que $2\pi \frac{\sqrt{5}}{3}$.
- (e) Cap de les anteriors

Solució: Recordeu que

$$\text{Àrea}(S_{OY}) = 2\pi \int_C x \, d\ell, \quad \text{Àrea}(S_{OX}) = 2\pi \int_C y \, d\ell.$$

Si parametritzem C per $\gamma(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 1]$, es té que $\gamma'(x) = (1, 2x)$ i, per tant, $\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + 4x^2}$. Així doncs:

$$\text{Àrea}(S_{OY}) = 2\pi \int_C x \, d\ell = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx, \quad \text{Àrea}(S_{OX}) = 2\pi \int_C x^2 \, d\ell = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx.$$

Tenint en compte que la integral sobre un interval no varia si aquest és obert o tancat (l'àrea sobre un punt és 0), del fet que si $x \in (0, 1)$ aleshores $x^2 < x$, i que $\sqrt{1 + 4x^2}$ és sempre positiu, es dedueix que

$$\text{Àrea}(S_{OX}) = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx < 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \text{Àrea}(S_{OY}).$$

Finalment,

$$\text{Àrea}(S_{\text{OX}}) = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx \leq 2\pi\sqrt{5} \int_0^1 x^2 dx = 2\pi\sqrt{5} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

T4. (1 punt) Considereu una barra unidimensional de longitud π , la temperatura de la qual, $u(x, t)$, evoluciona segons l'equació de la calor amb una font interna:

$$u_t = u_{xx} + \cos x, \quad 0 < x < \pi.$$

i amb condicions de contorn de Neumann homogènies:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0.$$

Aleshores, una solució $u(x)$ que no depengui del temps és:

- (a) $u(x) = -\cos x + C$, amb C constant arbitrària.
- (b) $u(x) = \sin x + C$, amb C constant arbitrària.
- (c) No existeix cap $u(x)$ que ho satisfaci.
- (d) $u(x) = \cos x + C$, amb C constant arbitrària.**
- (e) Cap de les anteriors,

Solució: Que $u(x, t)$ no depengui del temps equival a que $u = u(x)$ i, per tant, a que $u_t = 0$. Aleshores, l'equació es redueix a una EDO de segon ordre:

$$u''(x) + \cos(x) = 0 \implies u''(x) = -\cos(x),$$

on $' = d/dx$, amb condicions $u'(0) = u'(\pi) = 0$. Integrant-la, obtenim $u'(x) = -\sin x + C_1$, amb $C_1 \in \mathbb{R}$. Si imposem $u'(0) = u'(\pi) = 0$ es dedueix que $C_1 = 0$, de forma que $u'(x) = -\sin x$. Integrant novament, s'obté que $u(x) = \cos x + C$, amb $C \in \mathbb{R}$ constant arbitrària.

T5. (1 punt) Sigui $F(x, y, z) = \left(4x^2, \frac{5y^2}{2}, z^2\right)$.

Calculeu el flux del camp F a través de la vora del sòlid $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0\}$ orientada pel vector normal apuntant cap a l'interior.

- (a) $\pi/2$
- (b) $-\pi$**
- (c) $3\pi/2$
- (d) -2π
- (e) 25

Solució: Apliquem el teorema de la divergència:

$$\text{flux} = - \int_W (8x + 5y + 2z) dx dy dz = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} zr dz dr d\theta = -\pi,$$

on hem utilitzat que l'orientació és l'oposada de l'usual, que $\int_W x dx dy dz = \int_W y dx dy dz = 0$ i usat coordenades cilíndriques per a resoldre la integral $\int_W z dx dy dz$.

T6. (1 punt) Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y)$ al llarg de la corba $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1, x \geq 1\}$ recorreguda en sentit antihorari.

- (a) 0
- (b) $\sqrt{3}$**
- (c) $\sqrt{3}/3$
- (d) $3\sqrt{3}/2$

(e) $\sqrt{3}/2$

Solució: Una possible opció és comprovar que F és un camp conservatiu (n'hi ha prou a veure que $\text{rot } F = 0$ i que el domini de definició de F , $\mathbb{R}^2$, és simplement connex). Per tant, la integral no depèn del camí escollit. Canviem la corba donada per un segment: $\sigma(t) = (1, t)$, on $t \in \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Llavors la circulació val

$$\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \langle (1, t), (0, 1) \rangle dt = \sqrt{3}.$$

Una altra manera de resoldre'l es aplicant el teorema de Newton-Leibniz.

T7. (1 punt) Siguin $h, R > 0$. Calculeu la massa de la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + z^2), 0 \leq y \leq h\}$ si la densitat superficial és igual a la distància al pla $z = 0$.

- (a) 0
- (b) $\frac{3R^2\sqrt{h^2 + R^2}}{4}$
- (c) $\frac{4R^2\sqrt{h^2 + R^2}}{3}$
- (d) $\frac{4R\sqrt{h^2 + R^2}}{3}$
- (e) $\frac{3R\sqrt{h^2 + R^2}}{4}$

Solució: Parametritzem el con en forma de gràfica d'una funció:

$$y = y(x, z) = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + z^2}, \quad (x, z) \in K = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Llavors

$$m(S) = \int_S |z| dS = \int_K |z| \|(y_x, -1, y_z)\| dx dz = 2 \int_{\tilde{K}} z \|(y_x, -1, y_z)\| dx dz$$

on $\tilde{K}$ és la part del cercle amb $z \geq 0$ i $\|(y_x, -1, y_z)\| = \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R}$. Així s'obté

$$m(S) = 2 \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{4R^2\sqrt{h^2 + R^2}}{3},$$

on hem utilitzat coordenades polars $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$.

PROBLEMES

P1. (1.5 punts) Un model senzill de moviment interplanetari (pensant en traslladar una nau d'un planeta a un altre, suposats els dos planetes puntuals i de masses iguals) vé donat pel següent sistema d'EDO:

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \Omega_x \\ y'' + 2x' = \Omega_y, \end{cases}$$

on $\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2}$, essent $r_1 = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + y^2}$, les distàncies respectives de la nau a un i a l'altre planeta, $\Omega_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\Omega_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $' = d/dt$ i on (x, y) és la posició de la nau.

Aleshores, resoleu les següents qüestions:

- Expresseu el sistema anterior com un sistema d'EDO de 1^r ordre en forma normal. Indicació: la dimensió del sistema resultant és 4.
- Trobeu els punts d'equilibri del sistema obtingut a (a) que estiguin situats fora de l'eix x (és a dir, amb $y \neq 0$). Indicació: al sistema que heu de resoldre per tal de trobar els punts d'equilibri traieu factor comú x a la 3^a equació i y a la 4^a equació.
- Quina interpretació podeu donar dels punts d'equilibri?

Solució:

- Amb el canvi de variables $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x', x_4 = y'$, el sistema de dues EDOs de 2n ordre esdevé un sistema de 4 EDOs de 1er ordre:

$$\begin{cases} x'_1 = x_3 \\ x'_2 = x_4 \\ x'_3 = 2x_4 + \Omega_{x_1}(x_1, x_2) \\ x'_4 = -2x_3 + \Omega_{x_2}(x_1, x_2). \end{cases}$$

- Per a buscar els punts d'equilibri cal resoldre:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \Omega_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \Omega_{x_2}(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Traiem factor comú de $x_1 = x$ a la 3a equació i de $x_2 = y$ a la 4a equació i obtenim dues equacions a resoldre:

$$\begin{cases} x \left(1 - \frac{1}{2r_1^3} - \frac{1}{2r_2^3} \right) + \frac{1}{4r_1^3} - \frac{1}{4r_2^3} = 0 \\ y \left(1 - \frac{1}{2r_1^3} - \frac{1}{2r_2^3} \right) = 0 \end{cases}$$

Com que $y \neq 0$ de la 2a equació obtenim

$$(*) \quad 1 - \frac{1}{2r_1^3} - \frac{1}{2r_2^3} = 0$$

i substituint a la 1a, s'obté $r_1 = r_2 = r$. Llavors de (*): $1 = \frac{1}{r^3}$ és a dir $r = 1$, de manera que hi ha 2 punts d'equilibri localitzats a distància 1 dels dos planetes.

- Del fet que els punts d'equilibri satisfan les equacions de l'apartat anterior es deriva:

$$\begin{aligned} x_3 = 0 &\Rightarrow x' = 0, \\ x_4 = 0 &\Rightarrow y' = 0, \\ \Omega_{x_1}(x_1, x_2) = 0 &\text{ i } x_4 = 0 \Rightarrow x'_3 = 0 \Rightarrow x'' = 0, \\ \Omega_{x_2}(x_1, x_2) = 0 &\text{ i } x_3 = 0 \Rightarrow x'_4 = 0 \Rightarrow y'' = 0. \end{aligned}$$

Per tant, als punts d'equilibri l'acceleració és nul·la i la velocitat també, de forma que la nau romandrà per sempre, a velocitat 0, en els dos punts d'equilibri trobats.

P2. (1.5 punts) Sigui $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Considereu el camp vectorial definit a Ω :

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + \alpha xz, \frac{x}{x^2 + y^2} + \beta yz, (x^2 + y^2)\gamma \right),$$

on α, β, γ són constants reals.

- (a) És Ω un domini simplement connex? Justifiqueu la resposta.
(b) Demostreu que si $\alpha = \beta = 2\gamma$ aleshores $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ a tot Ω .

A partir d'ara, suposeu que $\alpha = \beta = 2\gamma$.

- (c) Descomposeu F com a suma de dos camps vectorials: $F = F_v + F_p$, on F_v no depèn de les constants α, β, γ (i, és clar, F_p , sí). Demostreu que F_v no és conservatiu a Ω .
(d) Considereu ara el subdomini $\Omega' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 1\}$. Justifiqueu que Ω' és simplement connex i demostreu que $F_v = \nabla f_v$ on $f_v(x, y, z) = \arctg(y/x)$.
(e) Trobeu un camp escalar f_p tal que $\nabla f_p = F_p$ i justifiqueu que $f_p \in \mathcal{C}^1(\Omega')$.
(f) Calculeu el treball realitzat pel camp F per moure una partícula al llarg de l'hèlix H parametritzada per $\sigma(t) = (\cos t, 2 + t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

Solució:

- (a) No ho és. N'hi ha prou a veure que qualsevol corba tancada al voltant de l'eix OZ no es pot deformar fins a esdevenir un punt sense sortir del domini Ω .
(b) Considerant l'expressió del rotacional, obtenim:

$$\text{rot } F = (y(2\gamma - \beta), x(\alpha - 2\gamma), 0)$$

Igalant la primera i la segona component a zero obtenim que $\beta = 2\gamma$ i $\alpha = 2\gamma$, respectivament. Aleshores, $\alpha = \beta = 2\gamma$.

- (c) Clarament, $F = F_v + F_p$ amb $F_v = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ i $F_p = (2\gamma xz, 2\gamma yz, \gamma(x^2 + y^2))$.

Una possibilitat és considerar una corba tancada C a Ω de manera que la circulació d' F_v al llarg d'ella no sigui nul·la. Per exemple, si considerem C com la circumferència de radi 1 centrada a l'origen al pla $z = 0$, tenim

$$\oint_C F_v \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

- (d) Ω' sí és simplement connex doncs qualsevol corba tancada dins d' Ω' es pot deformar fins a obtenir un punt que pertanyi a Ω' . De fet, la idea és que evita l'eix OZ . Comprovar que $\nabla f_v = F_v$ és directe a partir del fet que

$$\frac{\partial f_v}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f_v}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

- (e) Busquem ara una funció escalar f_p tal que $\nabla f_p = F_p$. Imposem:

$$\frac{\partial f_p}{\partial x} = 2\gamma xz \implies f_p = \gamma x^2 z + g(y, z).$$

Derivant l'expressió anterior respecte a y i substituint a la condició $\frac{\partial f_p}{\partial y} = 2\gamma yz$:

$$0 + \frac{\partial g}{\partial y} = 2\gamma yz \implies g(y, z) = \gamma y^2 z + h(z).$$

Tenim que $f_p = \gamma x^2 z + \gamma y^2 z + h(z) = \gamma z(x^2 + y^2) + h(z)$. Substituint a la condició de la z :

$$\frac{\partial f_p}{\partial z} = \gamma(x^2 + y^2) \implies \gamma(x^2 + y^2) + h'(z) = \gamma(x^2 + y^2) \implies h'(z) = 0 \implies h(z) = C.$$

Per tant,

$$f_p(x, y, z) = \gamma z(x^2 + y^2) + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

que és de classe $\mathcal{C}^1(\Omega')$ doncs les seves derivades parcials existeixen a Ω' i són funcions contínues. L'expressió del potencial, a Ω' , de F és

$$f(x, y, z) = f_v(x, y, z) + f_p(x, y, z) = \arctan(y/x) + \gamma z(x^2 + y^2) + K.$$

- (f) Tenint en compte que H està inclosa a Ω' , que Ω' és simplement connex i que a Ω' es té que $F = \nabla f$, del teorema de Newton-Leibniz es dedueix que

$$\int_H F \cdot d\vec{l} = \int_H \nabla f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A) = \arctg(2 + 2\pi) - \arctg 2,$$

on $B = \sigma(2\pi) = (1 + 2 + 2\pi, 0)$ i $A = \sigma(0) = (1, 2, 0)$.