

Equacions diferencials GETI (240131)

Examen – 19 de juny de 2025

Temps: 3h (la part test es recollirà 30 min abans)

Instruccions: Aquest examen consta d'una part de preguntes test i una part de problemes:

- **Test (T1 - T5): respostes correctes +0.75 punts, incorrectes -0.15 punts** (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes. La part de test es recollirà 30 min abans de la finalització de l'examen.
- **Problemes (P1-P5):** La puntuació de cada pregunta està indicada a l'enunciat corresponent. Responen de manera concisa però justificant els passos importants.

Escriviu el vostre nom i cognoms, en majúscules, a cada un dels fulls. Es pot dur formulari si segueix les condicions publicades a Atenea. Les notes provisionals, resolució, data de revisió, etc, sortiran publicades a Atenea.

TEST

T1. (0.75 punts) Considereu l'EDO $x' = (1 - x)(2x - 1)$ amb condició inicial $x(0) = x_0$. Per a quins valors de x_0 , la solució $x(t)$ del problema de valor inicial (PVI) complirà que $x(t^*) = 0$ per algun valor $t^* \geq 0$ finit.

- (a) $(-\infty, 0]$
- (b) $(-\infty, 1/2) \cup (1, +\infty)$
- (c) $(-\infty, 1/2]$
- (d) $[0, 1/2)$**
- (e) Cap de les anteriors

Solució: L'EDO ve definida per la funció $f(x) = (1 - x)(2x - 1)$, i els seus zeros són els punts d'equilibri de l'EDO: $x = 1, 1/2$. Com que són dos zeros simples, la funció canvia de signe en cadascun dels seus zeros. Llavors, busquem per a quins x_0 la solució arriba a $x(t^*) = 0$ per algun $t^* \geq 0$.

- Si $x_0 = 0$: clarament, $x(0) = 0 \Rightarrow t^* = 0$
- Si $x_0 < 0$: com que $x' < 0$, $x(t)$ és decreixent i per tant no creua el 0 per $t \geq 0$
- Si $0 < x_0 < \frac{1}{2}$: $x' < 0 \Rightarrow x(t)$ és decreixent, de fet $x(t) \rightarrow -\infty$, i per tant la solució assoleix el valor 0 per un t^* finit.
- Si $x_0 = \frac{1}{2}$ o $x_0 = 1$: les solucions són constants i no s'anul·len mai.
- Si $\frac{1}{2} < x_0 < 1$: $x' > 0 \Rightarrow x(t)$ és creixent i tendeix a 1 quan $t \rightarrow \infty$, per tant s'allunyen del 0
- Si $x_0 > 1$: $x' < 0$, però $x(t) \rightarrow 1$, sense arribar a 0

Conclusió: Només els valors $x_0 \in [0, 1/2)$ generen solucions que arriben a $x(t) = 0$ per algun $t \geq 0$.

Els valors $x_0 < 0$ també porten a $x = 0$, però per a temps negatius.

T2. (0.75 punts) La solució del PVI,

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 4e^{3t} \\ y' = -4x + 3y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

satisfà que en $t = \pi$ val

- (a) $(x(\pi), y(\pi)) = (e^{3\pi}, e^{3\pi})$
- (b) $(x(\pi), y(\pi)) = (e^{3\pi}, e^{3\pi} - 1)$
- (c) $(x(\pi), y(\pi)) = (e^{3\pi}, 0)$**
- (d) $(x(\pi), y(\pi)) = (e^{3\pi}, 2e^{3\pi})$
- (e) Cap de les anteriors.

Solució: Primer escrivim el sistema en forma matricial:

$$X' = AX + \mathbf{b}(t), \quad \text{on} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 4e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculem la solució general del sistema homogeni $X' = AX$:

Troblem els valors propis de A :

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 4i$$

Un vector propi $\mathbf{v}$ de valor propi $\lambda = 3 + 4i$ és un element del nucli de

$$\begin{pmatrix} -4i & 4 \\ -4 & -4i \end{pmatrix}$$

d'on clarament podem obtenir $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Així, la solució del sistema homogeni és:

$$X_h(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 4t & \sin 4t \\ -\sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Busquem una solució particular fent variació de les constants: $X_p(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t)$ on $\mathbf{u}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)$. Aleshores:

$$\mathbf{u}'(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos 4t \\ 4 \sin 4t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}(t) = \int \begin{pmatrix} 4 \cos 4t \\ 4 \sin 4t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \sin 4t \\ -\cos 4t \end{pmatrix}$$

Solució particular:

$$X_p(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) \\ -\sin(4t) & \cos(4t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ -\cos(4t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nota: també es podria haver fet buscant una solució particular de la forma $X_p(t) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^t \end{pmatrix}$

La solució general és:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t)$$

Imposem les condicions inicials per trobar c_1, c_2 :

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 1$$

Per tant la solució és $x(t) = e^{3t}(\cos(4t) + \sin(4t))$ i $y(t) = e^{3t}(\cos(4t) - \sin(4t) - 1)$, que en $t = \pi$ val $x(\pi) = e^{3\pi}$ i $y(\pi) = 0$

T3. (0.75 punts) Considereu el sistema d'EDO's:

$$\begin{cases} x' = (x-1)(x-3) \\ y' = -(y+1) \end{cases}$$

Respecte al comportament qualitatiu d'aquest sistema, quina de les següents afirmacions és correcta?

- (a) El punt d'equilibri $(1, -1)$ és atractor i té com a conca d'atracció la regió del pla on $x > 1$.
- (b) El punt $(3, -1)$ és atractor per a tota condició inicial.
- (c) El punt $(1, -1)$ és atractor i té com a conca d'atracció la regió del pla on $x < 3$.**
- (d) Si la solució passa per $(4, 2)$, llavors el seu límit quan $t \rightarrow \infty$ és $(3, -1)$.
- (e) Cap de les anteriors.

Solució: Notem que es tracta d'un sistema no lineal autònom on les equacions estan desacoblades.

Els punts d'equilibri es troben resolent:

$$x' = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = 3, \quad y' = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \text{punts d'equilibri: } (1, -1), (3, -1)$$

L'estudi qualitatiu mostra que:

- $x' > 0$ per $x < 1$ o $x > 3$ i $x' < 0$ per $1 < x < 3$.
- $y' < 0$ per $y > -1$ i $y' > 0$ per $y < -1$.

Això implica que $(1, -1)$ és atractor amb conca d'atracció $x < 3$, mentre que $(3, -1)$ és un punt de sella.

Si $(x(0), y(0)) = (4, 2)$, llavors $x(t) \rightarrow +\infty$, $y(t) \rightarrow -1$, per tant:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (+\infty, -1)$$

T4. (0.75 punts) Considereu el sistema d'EDO's lineal homogeni $X' = A_\mu X$, amb matriu $A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Determineu quina de les següents informacions és correcta?

- (a) **Per a $\mu < 1$, la solució del problema de valor inicial $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ satisfà que $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$.**
- (b) L'origen és un focus atractor per $\mu < -1$.
- (c) Per a $-1 < \mu < 1$, la solució del problema de valor inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ satisfà que $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$.
- (d) Per a $\mu = -1$, no existeix cap solució que tendeixi a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$.
- (e) Cap de les anteriors.

Solució: Calculem la Traça (T), el Determinant (D) i el Discriminant Δ :

$$D = \mu^2 - 1, \quad T = 2\mu, \quad \Delta = T^2 - 4D = 4 > 0$$

i n'estudiem el signe:

- Si $\mu < -1$, tenim $D > 0$, $T < 0$ i $\Delta > 0$, l'origen és un node propi atractor. I totes les solucions tendeixen a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$.
- Si $-1 < \mu < 1$, tenim $D < 0$, l'origen és un punt de sella.
- Si $\mu > 1$, tenim $D > 0$, $T > 0$, i $\Delta > 0$, l'origen és un node propi repulsor. I totes les solucions escapen de l'origen quan $t \rightarrow +\infty$, excepte l'origen.

Els valors propis són $\lambda_{\pm} = \mu \pm 1$ i per a tot $\mu \in \mathbb{R}$ els vectors propis associats són $\mathbf{v}_{\pm} = (1, \pm 1) \forall \mu \in \mathbb{R}$, els quals determinen rectes o direccions pròpies. Així, la direcció pròpia donada per $\mathbf{v}_{-} = (1, -1)$ és atractora si $\mu < 1$, neutra (formada per punts d'equilibri) si $\mu = 1$ i repulsora si $\mu > 1$. Per contra, la direcció pròpia donada per $\mathbf{v}_{+} = (1, 1)$ és atractora si $\mu < -1$, neutra (formada per punts d'equilibri) si $\mu = -1$ i repulsora si $\mu > -1$. Per tant, totes les solucions amb condició inicial sobre la recta $[\mathbf{v}_{-}]$ tendeixen a l'origen quan $\mu < 1$.

T5. (0.75 punts) Considereu el retrat de fases de la Figura 1 corresponent a un sistema autònom 2D amb punts d'equilibri A , B , C . Quina de les següents afirmacions és correcta?

- (a) El punt B és una sella, les trajectòries que comencen a prop seu poden tendir al punt A o al punt C quan $t \rightarrow \infty$.
- (b) **El punt C és un focus repulsor, i les trajectòries que comencen a prop de C no poden tendir ni al punt A ni al punt B quan $t \rightarrow \infty$.**
- (c) Els únics punts d'equilibri repulsors són el punt B i el punt C .
- (d) El punt A és un focus atractor i la seva conca d'atracció és tot el pla excloent l'interior de la regió delimitada per l'òrbita periòdica (marcada en traç gruixut a la Figura).
- (e) Cap de les anteriors.

Solució: A és un focus atractor, B és una sella i C és un focus repulsor.

L'únic punt d'equilibri atractor és A , i la seva conca d'atracció és la regió a l'esquerra de la varietat invariant estable de la sella B .

El punt de sella B no és un repulsor, ja que existeixen trajectòries que tendeixen a aquest punt quan $t \rightarrow \infty$. Per tant, l'únic repulsor és C . Pel teorema d'existència i unicitat, les trajectòries que comencen prop de C no poden superar la barrera que representa la trajectòria marcada en traç gruixut que el rodeja completament. Així, les trajectòries que comencin prop de C no poden aproximar-se ni a A ni a B .

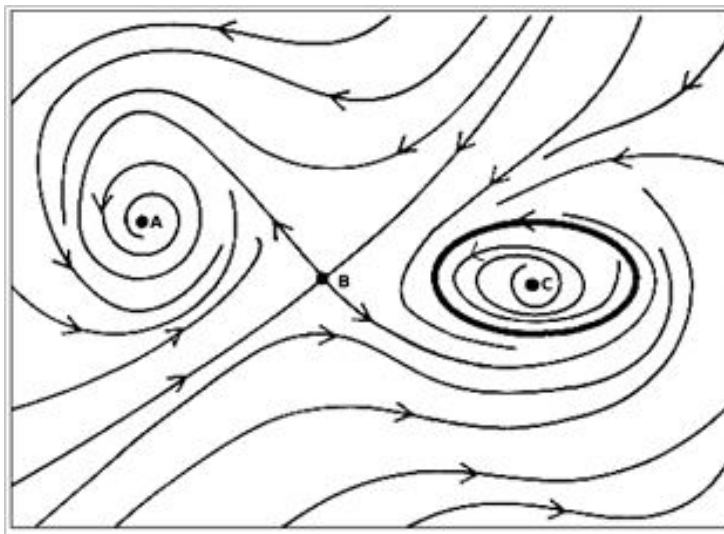


Figure 1: Retrat de fases d'un sistema autònom 2D.

PROBLEMES

- P1.** (1 punt) **Preguntes teòriques curtes** (independents entre elles; totes valen igual, les respostes incorrectes no resten).
- (a) D'entre les equacions de la llista, determineu quines d'elles són **equacions diferencials ordinàries lineals d'ordre 2**. Justifiqueu la resposta.
- $2x'' + \sin(t)x' - \cos(t) = 0$
 - $x'' + \cos(x) + \sin(t) = 0$
 - $x'' + 2x' + x = e^t$
 - $x' + 2x = 0$
- (b) Sigui $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - te^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la solució general de l'equació diferencial $x'' - 3x' + 2x = e^t$. Doneu dues solucions particulars.
- (c) Donat un sistema lineal no homogeni d'EDOs $x' = Ax + b(t)$. Pot tenir el sistema no homogeni dues solucions periòdiques no trivials diferents si el sistema homogeni associat és atractor? Justifiqueu raonadament la resposta.

Solució:

- a) Les EDOs lineals de $2n$ ordre són de la forma $a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$ amb $a(t) \neq 0$. Per tant,
- $2x'' + \sin(t)x' - \cos(t) = 0$ és EDO lineal no homogenia d'ordre 2 ja que és de la forma descrita amb $a_2(t) = 2$, $a_1(t) = \sin(t)$, $a_0(t) = 0$, $b(t) = \cos(t)$.
 - $x'' + \cos(x) + \sin(t) = 0$ **No** és lineal, ja que el terme $\cos(x)$ és no lineal en x .
 - $x'' + 2x' + x = e^t$ és una EDO lineal no homogenia d'ordre 2 a coeficients constants.
 - $x' + 2x = 0$ és lineal però d'ordre 1, ja que només surt la derivada x' , per tant, **no** és una EDO lineal d'ordre 2.
- b) Com que la solució general és $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - te^t$, per obtenir solucions particulars simplement hem de fixar constants c_1, c_2 . Per exemple,
- Solució particular 1: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$

$$x_p^{(1)}(t) = -te^t$$
 - Solució particular 2: $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

$$x_p^{(2)}(t) = e^t - te^t$$
- c) Si el sistema homogeni associat $x' = Ax$ és atractor totes les seves solucions tendeixen a zero quan $t \rightarrow \infty$. Apliquem reducció a l'absurd i suposem que existeixen dues solucions $x_1(t), x_2(t)$ del sistema no homogeni i que són periòdiques no trivials. Aleshores, la seva diferència $x_1(t) - x_2(t)$ seria una solució periòdica no trivial del sistema homogeni, contradient el fet que totes tendeixen a zero. Per tant, no pot tenir dues solucions periòdiques no trivials.

- P2.** (1.25 punts) Considereu l'EDO $x'' + 4x = 5 \sin \alpha t$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Determineu els valors de α pels quals el sistema té una solució particular de la forma $x_p(t) = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$.
- Determineu la solució general del problema per al cas $\alpha = 3$.

(c) Calculeu la solució $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$. Determineu si és periòdica o no i, en cas que ho sigui, calculeu-ne el període.

Solució:

a) Proposem una solució particular de la forma:

$$x_p(t) = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$$

Derivem dues vegades:

$$x_p''(t) = -A\alpha^2 \cos \alpha t - B\alpha^2 \sin \alpha t$$

Substituïm a l'EDO:

$$x_p'' + 4x_p = (-A\alpha^2 + 4A) \cos \alpha t + (-B\alpha^2 + 4B) \sin \alpha t$$

Perquè això sigui igual a $5 \sin \alpha t$, cal que:

$$(-A\alpha^2 + 4A) = 0 \quad \text{i} \quad (-B\alpha^2 + 4B) = 5$$

La primera equació implica:

$$A(4 - \alpha^2) = 0 \Rightarrow \text{o bé } A = 0 \text{ o bé } \alpha^2 = 4$$

Considerem primer $\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$:

$$A \text{ pot ser qualsevol, però la segona equació esdevé } -4B + 4B = 0 \neq 5$$

Incompatibilitat. Per tant, no és possible trobar A, B que ho compleixin.

Suposem, doncs, $\alpha^2 \neq 4$, aleshores $A = 0$ i podem resoldre per B :

$$(-B\alpha^2 + 4B) = 5 \Rightarrow B(4 - \alpha^2) = 5 \Rightarrow B = \frac{5}{4 - \alpha^2}$$

Per tant, **la forma proposada és solució particular sempre que $\alpha^2 \neq 4$, és a dir, $\alpha \neq \pm 2$.**

b) La solució general és la solució de l'homogènia més una solució particular.

L'equació homogènia:

$$x'' + 4x = 0 \Rightarrow x_h(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

Seguint l'apartat a) proposem una solució particular de la forma:

$$x_p(t) = A \cos 3t + B \sin 3t$$

d'on $A = 0$ i $B = 5/(4 - 9) = -1$.

I la solució general:

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \sin 3t$$

c) Tenim:

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \sin 3t$$

$$x'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - 3 \cos 3t$$

Imposem:

$$x(0) = C_1 + 0 - 0 = 2 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$x'(0) = 0 + 2C_2 - 3 = -1 \Rightarrow 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$$

Així la solució és:

$$x(t) = 2 \cos 2t + \sin 2t - \sin 3t$$

Aquesta funció és suma de funcions periòdiques de períodes:

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

amb una relació racional entre ells.

$$\text{Període comú mínim} = \text{mcm}\left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$$

La solució és periòdica de període 2π .

P3. (1.75 punts) Sigui $H(x, y)$ una funció $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Direm que el sistema Hamiltonià associat a la funció $H(x, y)$ és:

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(a) Demostreu que, donat un sistema Hamiltonià, la funció $H(x, y)$ serà una quantitat conservada.

A partir d'ara considerem $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

(b) Trobeu el sistema Hamiltonià associat.

(c) Calculeu-ne els punts d'equilibri i determineu la seva estabilitat local usant el mètode de linealització. Detecteu en quins casos el mètode de linealització no decideix.

(d) Utilitzeu la funció H per a determinar l'estabilitat dels punts d'equilibri per als casos en què el mètode de linealització no decideix.

(e) Justifiqueu que les òrbites es troben sobre les corbes $y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$, indicant què són E i $U(x)$. Si el sistema presenta òrbites periòdiques, indiqueu-ne el sentit de gir i un valor aproximat del seu període prop del punt d'equilibri.

(f) Utilitzeu els resultats obtinguts en els apartats anteriors per a identificar el retrat de fase del sistema entre els de la Figura 2.

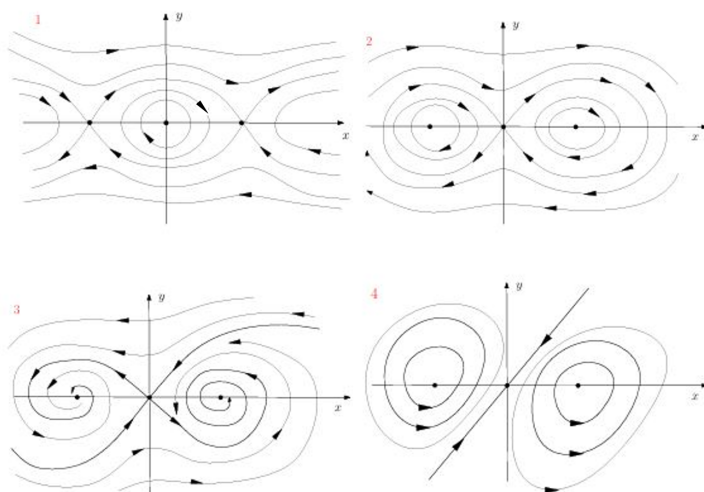


Figure 2: Quatre retrats de fases d'un sistema autònom 2D.

Solució:

(a) Per demostrar que $H(x, y)$ és quantitat conservada, calculem la derivada temporal de H :

$$\frac{dH}{dt} = \langle \nabla H, F \rangle = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y'.$$

Substituint les equacions del sistema Hamiltonià ($x' = \frac{\partial H}{\partial y}$, $y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Per tant, com que la derivada temporal és idènticament nul·la, $H(x, y)$ és una quantitat conservada.

(b) Per trobar el sistema Hamiltonià per $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$, calculem les derivades parcials:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y, \quad -\frac{\partial H}{\partial x} = x - x^3.$$

Aleshores, el sistema és:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases}.$$

(c) Per trobar els punts d'equilibri, resollem $x' = 0$ i $y' = 0$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - x^3 = 0 \implies x(1 - x^2) = 0 \implies x = 0, \pm 1 \end{cases}.$$

Per tant, els punts d'equilibri són: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

Per analitzar la seva estabilitat, apliquem el mètode de linealització i avaluem la matriu Jacobiana del sistema als punts d'equilibri:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- A $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, valors propis $\lambda = \pm 1$ (sella). El mètode de linealització decideix i l'origen és un punt d'equilibri inestable no repulsor.
 - A $(\pm 1, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, valors propis $\lambda = \pm i\sqrt{2}$ (centres lineals). El mètode de linealització no decideix.
- (d) Com que hem demostrat que el hamiltonià $H(x, y)$ és una quantitat conservada i aquesta funció té mínims locals estrictes per a $(\pm 1, 0)$, aquests punts d'equilibri seran estables no atractors i, de fet, seran centres no lineals.
- (e) Les òrbites del sistema es troben sobre les corbes de nivell del Hamiltonià, $H(x, y) = E$, on E és l'energia:

$$\frac{1}{2}y^2 - \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4}_{U(x)} = E \implies y = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.$$

El potencial $U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ té mínims a $x = \pm 1$ i un màxim a $x = 0$.

Prop de $(\pm 1, 0)$ el sistema presenta òrbites periòdiques el període de les quals s'acosta a $T = 2\pi/\sqrt{2}$ conforme ens apropem al punt d'equilibri. El sentit de gir és l'horari, ja que $y > 0$, $x' > 0$.

(f) **Retrat de fases:**

- Prop de $(\pm 1, 0)$: òrbites el·líptiques (centres), amb òrbites periòdiques amb sentit de gir horari.
- Prop de $(0, 0)$: separatrius hiperbòliques.

Per tant, una representació del retrat de fases seria el retrat de fases número 2 de la Figura 2.

P4. (0.75 punts) Considerem el problema següent, corresponent a la distribució de temperatures en una barnilla de longitud $L > 0$:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) & t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) & t > 0 \end{cases}$$

Escriviu la funció temperatura mitjana $T(t)$. Calculeu-ne la derivada. Què podeu dir del comportament de $T(t)$? Interpreteu físicament el resultat.

Solució: $T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$ és constant ja que

$$T'(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) dx = \frac{k^2}{L} [u_x(L, t) - u_x(0, t)] = 0.$$

La temperatura mitjana de la barnilla es manté constant ja que la calor que entra per un extrem surt per l'altre.

P5. (1.5 punts) Considereu el problema següent, que correspon a una corda vibrant infinita sota l'acció d'una força externa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

amb $F(x, t) = (t + 1) \cos x$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = 0$, i $c = 1$.

- (a) Sense calcular $u(x, t)$, trobeu el valor de l'acceleració inicial.
- (b) Busqueu una solució particular de l'EDP de la forma $u_p(x, t) = B(t) \cos x$, on $B(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- (c) Amb la solució obtinguda en l'apartat (b), definiu el canvi $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$ i plantegeu el nou problema per a $v(x, t)$. Resoleu-lo i dedueïu-ne la solució $u(x, t)$ del problema original.
- (d) Demostreu, aplicant el mètode de reducció a l'absurd, que la solució obtinguda no és igual a la superposició de dues ones viatjant en sentits oposats a velocitat $c = 1$.

Solució:

- (a) L'acceleració inicial es calcula avaluant $u_{tt}(x, 0)$. De l'equació d'ones:

$$u_{tt}(x, 0) = u_{xx}(x, 0) + F(x, 0)$$

- $u_{xx}(x, 0) = \frac{d^2}{dx^2} \cos x = -\cos x$
- $F(x, 0) = (0 + 1) \cos x = \cos x$

Per tant:

$$u_{tt}(x, 0) = -\cos x + \cos x = 0$$

- (b) Imposem una solució particular de la EDP de la forma $u_p(x, t) = (at + b) \cos x$. Substituint a l'equació no homogènia:

$$B''(t) \cos x + B(t) \cos x = (t + 1) \cos x \implies 0 + (at + b) = t + 1.$$

Per tant $a = 1$ i $b = 1$:

$$u_p(x, t) = (t + 1) \cos x.$$

- (c) Tenim que $v(x, t) = u(x, t) - (t + 1) \cos x$. Aleshores

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = u(x, 0) - u_p(x, 0) = \cos x - \cos x = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - u_{p,t}(x, 0) = 0 - \cos(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Apliquem la fórmula de D'Alembert per al problema homogeni amb $\tilde{f}(x) = 0$, $\tilde{g}(x) = -\cos x$, $c = 1$:

$$v(x, t) = \frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{g}(s) ds = -\frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) = -\cos x \sin t.$$

Aleshores, la solució general del problema és:

$$u(x, t) = v(x, t) + u_p(x, t) = -\cos x \sin t + (t + 1) \cos x = \cos x(t + 1 - \sin t).$$

- (d) Per demostrar que no és superposició d'ones viatgeres, aplicarem reducció a l'absurd i suposarem que existeixen les funcions p i q tals que $u(x, t) = p(x+t) + q(x-t)$. Si avaluem a $t = 0$:

$$p(x) + q(x) = \cos x, \quad p'(x) - q'(x) = 0.$$

Integrant la segona equació: $p(x) = q(x) + k$. Substituint a la primera:

$$q(x) + k + q(x) = \cos x \implies q(x) = \frac{\cos x - k}{2}, \quad p(x) = \frac{\cos x + k}{2}.$$

Aleshores:

$$u(x, t) = \frac{\cos(x+t) + \cos(x-t)}{2} = \cos x \cos t.$$

Però això contradiu la solució obtinguda $\cos x(t + 1 - \sin t)$, ja que, per exemple, a $t = \pi/2$:

$$\cos x \left(\frac{\pi}{2} + 1 - 1 \right) = \frac{\pi}{2} \cos x \quad \text{vs} \quad \frac{\cos(x + \pi/2) + \cos(x - \pi/2)}{2} = 0.$$

Per tant, la solució no pot expressar-se com a superposició de dues ones viatjant en sentits oposats.