

Equacions diferencials GETI (240131)

Examen – 15 de gener de 2025

Temps: 180 minuts

.....

Escriuiu el vostre nom i cognoms, en majúscules, a cada un dels fulls. Responeu de manera concisa però justificant els passos importants. A les preguntes de cert/fals les respostes incorrectes no resten punts. Es pot dur formulari si segueix les condicions publicades a Atenea. Les notes provisionals, resolució, data de revisió, etc, sortiran publicades a Atenea.

1. (1 punt) Considereu l'edo $\ddot{x} + \dot{x} + x = 2 \cos 3t$.

- (i) Trobeu una solució particular del tipus $x_p(t) = A \cos 3t + B \sin 3t$.
- (ii) Demostreu que és l'única solució periòdica que té. *Indicació: suposeu que l'edo no homogènia té una altra solució periòdica - no ha de ser necessàriament del tipus a (i) - i hauréu d'arribar a una contradicció.*

Solució:

(i) Si suposem $x_p = A \cos 3t + B \sin 3t$ aleshores

$$\dot{x}_p = -3A \sin 3t + 3B \cos 3t, \quad \ddot{x}_p = -9A \cos 3t - 9B \sin 3t.$$

Substituïnt a l'edo, s'obté

$$\ddot{x}_p + \dot{x}_p + x_p = (-8A + 3B) \cos 3t + (-8B - 3A) \sin 3t = 2 \cos 3t,$$

de forma que A i B han de ser solució del sistema $-8A + 3B = 2$, $3A + 8B = 0$. És a dir, $A = -\frac{16}{73}$ i $B = \frac{6}{73}$. Per tant, la solució periòdica buscada és

$$x_p(t) = -\frac{16}{73} \cos 3t + \frac{6}{73} \sin 3t.$$

Noteu que aquesta no és l'única forma que podria tenir una solució periòdica de l'edo de l'enunciat, sinó una molt concreta.

(ii) Fem-ho per reducció a l'absurd. Sigui $y_p(t)$ una altra solució periòdica de l'edo de l'enunciat. Si y_p és T -periòdica aleshores $\dot{y}_p, \ddot{y}_p$ i, per tant, $\ddot{y}_p + \dot{y}_p + y_p$ són també periòdiques de període T . Del fet que $2 \cos 3t$ és periòdica de període $\frac{2\pi}{3}$ es dedueix que $T = \frac{2\pi}{3}$.

Restant les expressions

$$\ddot{x}_p + \dot{x}_p + x_p = 2 \cos 3t, \quad \ddot{y}_p + \dot{y}_p + y_p = 2 \cos 3t,$$

i tenint en compte la linealitat de la derivada, es dedueix que

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_p - y_p) + \frac{d}{dt}(x_p - y_p) + (x_p - y_p) = 0.$$

És a dir, $x_p(t) - y_p(t)$ és, d'un costat, periòdica (de període $T = \frac{2\pi}{3}$) i, de l'altre, solució d'una oscil·lació esmorteïda del tipus $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, amb $\kappa = \frac{1}{2} > 0$ i $\omega_0^2 = 1$. Totes les solucions d'oscil·lacions esmorteïdes tendeixen a 0 quan $t \rightarrow +\infty$ i per tant no poden ser periòdiques, excepte la solució idènticament nul·la, que és periòdica de tots els períodes. Per tant, necessàriament, $x_p(t) - y_p(t) = 0$ d'on $y_p(t) = x_p(t)$, contradicció amb el fet que $y_p(t)$ és solució diferent de la solució $x_p(t)$.

2. (0.5 punts) Donat el sistema $x' = 2x - y^2$, $y' = x^2 + 4y$, justifiqueu si pot tenir o no òrbites periòdiques.

Solució: No en pot tenir cap d'o.p. perquè la divergència del camp vectorial val sempre 6; no s'anul·la mai i podem aplicar el resultat vist a teoria que ho assegura. Més precisament, d'un costat, el domini contingut dins l'òrbita periòdica és invariant pel flux perquè aquesta ho és; de l'altre, aquest mateix domini augmenta la seva àrea a través d'aquest flux doncs la divergència del camp de vectors és constant i positiva; contradicció. Per tant, el nostre sistema no pot tenir cap òrbita periòdica.

3. (1.5 punts) **Tirallonga de preguntes curtes** (independents entre elles; totes valen igual, les respostes incorrectes no resten). Digueu si cada una de les següents afirmacions és **certa** (C) o **falsa** (F) i justifiqueu la resposta (una resposta correcta sense justificació es considerarà incorrecta):

(a) Afirmació: Totes les trajectòries del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

són òrbites periòdiques al voltant de l'origen, recorregudes (totes) en sentit antihorari.

(b) Afirmació: Donat $|\mu| > \sqrt{2}$, la solució del PVI

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 - \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tendeix cap a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$.

(c) Sigui $x(t)$ la solució del següent Problema de Cauchy

$$\dot{x} = 3x(x - 2)(x - 5)^2, \quad x(0) = 4.$$

Afirmació: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 5$.

Solució:

(a) **Falsa**. Els vaps de la matriu del sistema són $\lambda = \pm 2i$. Per tant, l'origen és un centre lineal, envoltat d'òrbites periòdiques. Una manera ràpida de determinar en quin sentit son recorregudes aquestes trajectòries és calcular el vector velocitat (tangent) en un punt concret (usualment fàcil) del pla. Si prenem $P = (0, 1)$, el vector velocitat de l'òrbita (es pot veure que és una el·lipse) que passa per ell ve donat per

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el sentit de gir d'aquestes òrbites periòdiques, i de totes les altres, és horari.

(b) **Certa**. Observeu que $\det A = 2 - \mu^2 < 0$ car $|\mu| > \sqrt{2}$. Per tant l'origen és un punt tipus sella. La forma triangular de la matriu fa que el vector $e_2 = (0, 1)$ sigui vep de vap $\lambda = 2 - \mu^2 < 0$ i, en conseqüència, la recta $\{x = 0\}$ correspon a la recta invariant estable del $(0, 0)$. El punt $(0, 1)$, c.i. de la solució del PVI, pertany a aquesta recta invariant estable i per tant $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$.

(c) **Certa**. Els punts d'equilibri són $x = 0, 2$ i 5 . Cap òrbita solució de l'edo pot travessar-los. Observeu que per a tot $x \in (2, 5)$ es té que $3x(x - 2)(x - 5)^2 > 0$. Això implica que si $x(t) \in (2, 5)$ aleshores $\dot{x}(t) > 0$ i, conseqüentment, $x(t)$ creix. Aquest és el cas de l'òrbita amb c.i. $x(0) = 4$, de forma que necessàriament el seu límit és 5 quan $t \rightarrow +\infty$.

4. (2 punts) Considereu el següent sistema mecànic clàssic

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -U'(x), \end{cases} \quad (1)$$

on $' = \frac{d}{dx}$ indica la derivada respecte a x , $\dot{} = \frac{d}{dt}$ respecte a t i $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tal que té un mínim relatiu estricte al punt $x = x_0$. Aleshores, responeu les següents preguntes que fan referència al punt $(x_0, 0)$:

- Demostreu que $(x_0, 0)$ és un punt d'equilibri de (1).
- Estudieu la seva estabilitat local pel mètode de linealització. Què podeu dir d'aquesta?
- Useu una funció de Lyapunov convenient per a determinar la seva estabilitat (o inestabilitat) local.
- Doneu l'expressió que tenen les òrbites solucions de (1) properes al punt $(x_0, 0)$? Si corresponen a òrbites periòdiques, a quin valor tendeix el seu període conforme s'acosten al punt $(x_0, 0)$?

Solució: En primer lloc noteu que x_0 mínim relatiu estricte d' $U(x)$ implica que $U'(x_0) = 0$ i que $U''(x_0) > 0$. Aleshores,

(i) És directe comprovar que $(x_0, 0)$ és un punt d'equilibri: si substituïm $(x, y) = (x_0, 0)$ al camp de vectors/velocitats $(y, -U'(x))$ s'obté $(0, -U'(x_0)) = (0, 0) \Rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$.

(ii) El sistema linealitzat a $(x_0, 0)$ ve donat per la seva matriu diferencial avaluada a $(x_0, 0)$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \end{pmatrix}$$

La matriu té traça 0 i determinant igual a $U''(x_0) > 0$. Els vaps de la matriu s'obtenen fent

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -U''(x_0) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + U''(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -U''(x_0) < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{U''(x_0)}.$$

És a dir, els vaps són imaginaris purs. El punt $(x_0, 0)$ és un centre lineal del sistema linealitzat però no podem dir res de l'estabilitat del sistema no lineal.

(iii) Usem com a funció de Lyapunov l'energia mecànica clàssica (cinètica + potencial):

$$V(x, y) = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x).$$

$E(x, y)$ és $C^1(\mathbb{R})$ doncs $U(x)$ també ho és per hipòtesi. A més, del fet que x_0 sigui un mínim relatiu estricte de la funció $U(x)$ es dedueix que $E(x, y)$ és definida positiva al punt $(x_0, 0)$. Si volem exigir que V valgui 0 al punt d'equilibri, caldria prendre

$$V(x, y) = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x) - U(x_0).$$

Ambdues possibilitats són igual de vàlides.

Calculem $W = \langle \nabla E, F \rangle$, on $F(x, y) = (y, -U'(x))$, la seva derivada temporal al llarg de qualsevol trajectòria. És directe comprovar que

$$\langle \nabla E, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} U'(x) \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -U'(x) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

És a dir, $E(x, y)$ és una integral primera (una quantitat conservada) de (1). En particular, el punt d'equilibri $(x_0, 0)$ és un punt estable però no asimptòticament estable. És el que s'anomena un centre (no lineal) i les òrbites al seu voltant són òrbites periòdiques.

(iv) Del fet que E sigui una integral primera el sistema, es deriva que les òrbites properes a $(x_0, 0)$ (i de fet, es podria veure que també es satisfà a tot el pla) venen donades per $E(x, y) = C$, amb $C = \text{constant}$. En particular aquestes són de la forma $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = C$. Del fet que $E(x_0, 0) = U(x_0)$ tenim que els valors de C són propers a $U(x_0)$. Aquestes òrbites són periòdiques, el període de les quals s'acosten a $T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_0)}}$ conforme ens apropem al punt d'equilibri $(x_0, 0)$.

5. (1 punt) Considereu una corda vibrant infinita, de densitat constant ρ , sotmesa a una força externa $F(x) = e^{-x}$, és a dir, descrita per l'equació

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x), \quad x, t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Suposeu que

$$u(x, 0) = 2e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Aleshores,

- Busqueu una funció $w(x)$ solució de (2).
- Definiu la funció $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$. Quina EDP satisfà $v(x, t)$ i quines són les seves condicions inicials per a $t = 0$?
- Resoleu el problema obtingut a (ii) i useu la seva solució per a determinar una solució del problema original (2).

Solució:

(i) Substituint $w = w(x)$ a (2) tenim que $-w''(x) = e^{-x}$ d'on, integrant dues vegades, $w(x) = -e^{-x} + C_1x + C_0$, amb $C_{1,0}$ constants que podem pendre igual a 0. És a dir, $w(x) = -e^{-x}$.

(ii) Derivant $v(x, t)$ dues vegades respecte a x i t s'obté

$$v_{tt} = u_{tt} - \frac{d^2}{dt^2}(w(x)) = u_{tt}, \quad v_{xx} = u_{xx} - w''(x) = u_{xx} + e^{-x}.$$

Aleshores

$$v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} + e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow v_{tt} - v_{xx} = 0.$$

Respecte a les seves condicions inicials ($t = 0$): la primera, $v(x, 0) = u(x, 0) - w(x) = 2e^{-x} + e^{-x} = 3e^{-x}$. En quant a la segona, $v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$. Per tant $v(x, t)$ ha de ser solució del problema d'ones infinit homogeni $v_{tt} - v_{xx} = 0$ i condicions inicials

$$v(x, 0) = 3e^{-x}, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

(iii) Aplicant la fórmula de D'Alembert s'obté que

$$v(x, t) = \frac{3}{2} \left(e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)} \right) = \frac{3}{2} e^{-x} \left(\frac{e^{-t} + e^t}{2} \right) = 3e^{-x} \cosh t,$$

d'on

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x) = 3e^{-x} \cosh t - e^{-x} = e^{-x} (3 \cosh t - 1).$$

L'expressió final de la solució en termes del cosinus hiperbòlic no és necessària.

6. (1.5 punts) Sigui $\mu < 0$. Considereu el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4)$$

Aleshores, responeu les següents preguntes en l'ordre donat, justificant totes les respostes:

- (i) Comproveu que l'origen és un punt d'equilibri de (4).
- (ii) Calculeu el seu sistema linealitzat a l'origen, denotat per

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5)$$

Calculeu la traça i el determinant de la matriu A . A partir d'aquest càlcul, justifiqueu si l'origen és inestable/ estable/ atractor/ repulsor.

El sistema (5), contrau/expandeix o preserva àrea en un entorn de l'origen?

- (iii) Calculeu el polinomi característic d' A , els seus vaps, classifiqueu el tipus de punt d'equilibri a l'origen i l'estabilitat del sistema (5). Feu un croquis (qualitatiu) de les seves òrbites.

Què podem dir de l'estabilitat del sistema no lineal (4) en un entorn de l'origen?

- (iv) Calculeu la solució general del sistema (5).

Solució:

- (i) Directe per substitució a (2).
- (ii) La matriu

$$A = DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

de manera que $\text{tr } A = 2\mu < 0$ i $\det A = \mu^2 + 1 > 0$. Del fet que a dimensió 2 es satisfaci que $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$ i $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ i les expressions anteriors, es deriven dues úniques possibilitats: (a) o bé $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$, amb $\alpha = \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$; o (b) $\lambda_{1,2}$ són reals, del mateix signe ($\det A > 0$) i en particular ambdues negatives (car $\text{tr } A < 0$). En qualsevol dels dos casos, l'origen és un punt atractor (asimptòticament estable) del sistema (5).

Del fet que $\text{tr } A < 0$ es dedueix que el sistema (5) contrau àrea en un entorn de l'origen.

- (iii) El polinomi característic és $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\mu\lambda + (\mu^2 + 1)$, d'arrels (els vaps) $\lambda = \mu \pm i$. Per tant l'origen és un punt tipus *focus estable*, atractor. Les seves òrbites són espirals que giren en sentit antihorari: és suficient, per exemple, calcular el camp vectorial al punt $(1, 0)$; dóna $(\mu - 1, 1)$ on $\mu - 1 < 0$.

Del fet que $\text{Re } \lambda = \mu < 0$ es dedueix que l'origen és un punt atractor (asimptòticament estable) del sistema (4). Les seves òrbites seran petites deformacions, a prop de l'origen, de les espirals del sistema linealitzat.

- (iv) Calculem u vep de vap $\lambda_1 = \mu + i$. És a dir

$$u \in \text{Nuc}(A - (\mu + i)\text{Id}) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Una possible solució és

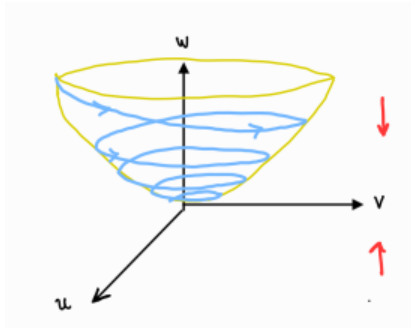
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

de manera que la solució general de (5) es pot escriure de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7. (0.5 punts) D'un sistema lineal homogeni $\dot{X} = AX$ amb $X = (x, y, z)^\top$ sabem que els vaps de la seva matriu A són $\{\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \lambda_3 = -4\}$. Feu un croquis (qualitatiu) de com són les seves òrbites a prop de l'origen.

Solució: L'origen és un focus atractor $(\lambda_{1,2})$ en el pla invariant generat pels vectors $\{u, v\}$, on $u + iv$ és un vep de vap λ_1 . Per altra banda, el vap $\lambda_3 < 0$ dona lloc a una recta invariant, de direcció w , vep de λ_3 , atractora cap a l'origen. La combinació d'ambdós factors dona lloc a òrbites que són espirals atractores (a $\mathbb{R}^3$) cap a l'eix determinat per w (girant al seu entorn) i cap al pla invariant determinat per u i v . En un dibuix qualitatiu, com es demana a l'enunciat, es poden prendre $u = e_1$, $v = e_2$ i $w = e_3$. Al croquis a sota es representa (qualitativament) una òrbita amb aquestes característiques. Està situada per sobre del pla invariant; de manera anàloga tindríem una representació a sota, tendint també cap al pla invariant. El fet que $|\lambda_3| > |\lambda_1|$ fa que el factor de compressió cap al pla invariant $\langle u, v \rangle$ sigui més gran que el factor de compressió (cilíndrica) cap a l'eix $\langle w \rangle$. El sentit de rotació en el croquis s'ha escollit de forma arbitrària.



8. (1 punt) Considereu el sistema $x' = x^2 + xy$, $y' = xy - y^3$. Aleshores,
- Demostreu que els eixos són invariants per la dinàmica.
 - Existeix alguna condició inicial (x_0, y_0) amb $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, de manera que la solució del sistema amb aquesta c.i. surti del primer quadrant? Justifiqueu la vostra resposta.

Solució:

(i) Si tenim un punt $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, a l'eix $y = 0$, el camp de velocitats a ell val $(x^2, 0)$ de forma que es mou horitzontalment i no surt de la recta $y = 0$. Per tant aquesta és invariant pel flux del sistema.

Anàlogament, si prenem un punt del tipus $(0, y)$, amb $y \in \mathbb{R}$, el camp de velocitats a ell és $(0, -y^3)$, vertical, de forma que no surt mai de la recta $x = 0$.

(ii) No n'existeix cap. Si tal trajectòria $(x(t), y(t))$ existís, tindríem aleshores un temps $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que la trajectòria - una corba contínua - tallaria un dels dos eixos per a $t = t_1$, és a dir, $(x(t_1), y(t_1))$ pertanyiria a la recta $x = 0$ o a la recta $y = 0$. Això no és possible perquè les solucions que comencen a qualsevol dels dos eixos romanen dins d'ells per a tot temps.

9. (1 punt) Sigui $x(t)$ la solució de l'oscil·lador harmònic $\ddot{x} + 7x = 0$ amb condicions inicials $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$.
- Trobeu $x(t)$, justificant tots els passos.
 - Per a quins valors del temps $t > 0$, la solució $x(t)$ trobada a (i) passa per la posició $x = 0$?

Solució:

(i) El polinomi característic associat és $\lambda^2 + 7 = 0$ d'on $\lambda = \pm i\sqrt{7}$. Per tant la solució general de $\ddot{x} + 7x = 0$ és

$$x(t) = A \cos(\sqrt{7}t) + B \sin(\sqrt{7}t).$$

Si imposem que $x(0) = 0$ tenim, substituint a l'expressió anterior, que $A = 0$. Llavors $x(t) = B \sin(\sqrt{7}t)$ d'on $\dot{x}(t) = \sqrt{7}B \cos(\sqrt{7}t)$. Si imposem que $\dot{x}(0) = 1$ obtenim $1 = \sqrt{7}B$ i, en conseqüència, la solució del PVI plantejat és

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{7}} \sin(\sqrt{7}t).$$

(ii)

$$x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{7}} \sin(\sqrt{7}t) = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{7}t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7}t = k\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

doncs $t > 0$. Per tant, $x(t_k) = 0$ per a $t_k = \frac{k\pi}{\sqrt{7}}$, $k \in \mathbb{N}$.

