

Nom i cognoms (en <u>MAJÚSCULES</u> !)	Columna (A,B,C...)	Fila (1,2,3...)	(A_1)
---	-----------------------	--------------------	---------

Puntuacions

- * **Test (t1 – t4):** respostes correctes +1 punt, incorrectes –0.20 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Problemes:** **p1** → 4 punts, **p2** → 3.5 punts,
- * **Qüestions (q1 – q3):** 1.5 punts cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).

Nota màxima: **16 punts**

t1

Considerem l'EDO $x' = x^3(x^2 - 4)(x + \alpha)$, essent $\alpha \neq 0, \pm 2$. Quina és l'estabilitat dels punts $-2, 0$ i 2 com a punts d'equilibri? (A = atractor, R = repulsor, I = inestable).

.....

Solució: L'EDO ve definida per la funció $f(x) = x^3(x^2 - 4)(x + \alpha)$, i els seus zeros són els punts d'equilibri de l'EDO: $0, \pm 2$ i $-\alpha$. Com que són tres zeros simples i un de triple, la funció canvia de signe en cadascun dels seus zeros. Usant aquest fet i que $f(x)$ és positiva quan $x \rightarrow \pm\infty$, deduïm que si ordenem els punts d'esquerra a dreta la seva estabilitat és: A, R, A i R. Segons el valor de α , el punt $-\alpha$ ocupa un lloc o altre d'aquesta llista. Suprimint-lo, tenim l'estabilitat de $-2, 0$ i 2 en aquest ordre.

t2

Si $x(t)$ és la solució del PVI $x'' + 2x' + x = at + b$, $x(0) = b$, $x'(0) = a$, trobeu el valor de $x(2)$.
 [Ind.: L'EDO té una solució particular de la forma $x_p(t) = At + B$.]

.....

Solució: La part homogènia té el polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, amb $\lambda = -1$ arrel doble, i per tant $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Substituint $x_p(t) = At + B$ a l'EDO no homogènia obtenim la identitat $0 + 2A + (At + B) = at + b$. Igualant coeficients resulta $A = a$, $B = b - 2a$, i per tant tenim $x_p(t) = at + (b - 2a)$ com a solució particular. La solució general de l'EDO no homogènia és $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$. Imposant les condicions inicials obtenim el sistema $(b - 2a) + c_1 = b$, $a - c_1 + c_2 = a$, d'on resulta $c_1 = c_2 = 2a$. Per tant la solució és $x(t) = at + (b - 2a) + 2a e^{-t}(1 + t)$, amb $x(2) = b + 6a e^{-2}$.

t3

Trobeu tots els valors de μ per als quals la solució del PVI $X' = \begin{pmatrix} \mu & a \\ -2 & a\mu \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

.....

Solució: La traça i el determinant són $T = (1 + a)\mu$ i $D = a(\mu^2 + 2)$.

- Si $a < 0$, tenim $D < 0$ i per tant el sistema és una sella. Així, cal que $(1, 1)$ sigui vector propi de valor propi < 0 . Multiplicant la matriu per $(1, 1)$ obtenim $(a + \mu, a\mu - 2)$. Així $(1, 1)$ és vector propi si $a + \mu = a\mu - 2$, que ens dona $\mu = -(2 + a)/(1 - a)$. El valor propi és $a + \mu = a - (2 + a)/(1 - a)$, i és negatiu.
- Si $a = 0$, el sistema és degenerat amb valors propis 0 i μ . La solució només pot tendir a l'origen si $\mu < 0$ i, a més, el vector $(1, 1)$ és vector propi de valor propi μ , és a dir, proporcional a $(\mu, -2)$. Per tant, cal $\mu = -2$.
- Si $a > 0$, sempre tenim $D > 0$ i les solucions tendeixen a l'origen quan $\mu < 0$, per a qualsevol condició inicial.

t4

Considerem el problema següent per a l'equació de Poisson amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2xy - x, & x \in (0, 2\pi), \quad y \in (0, \pi), \\ u_y(x, 0) = \pi x^2, & x \in (0, 2\pi), \\ u_y(x, \pi) = 0, & x \in (0, 2\pi), \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, & y \in (0, \pi). \end{cases}$$

Donada una solució $u(x, y)$, definim la funció $F(x) = \int_0^\pi u_x(x, y) dy$. Calculeu $F'(x)$.

Solució: Derivem $F(x)$ prenent x com a paràmetre de la integral, apliquem l'EDP, integrem i finalment apliquem les condicions de contorn:

$$F'(x) = \int_0^\pi u_{xx} dy = \int_0^\pi (-u_{yy} + 2xy - x) dy = -u_y + xy^2 - xy \Big|_{y=0}^{y=\pi} = -u_y(x, \pi) + \pi^2 x - \pi x + u_y(x, 0) = \pi x(\pi - 1 + x).$$

p1

Considerem el sistema d'EDOs $x' = y^2 - 2xy$, $y' = 8x^2 - 4xy$.

- Trobeu tots els seus punts d'equilibri.
- Determineu, si és possible, l'estabilitat de cada punt d'equilibri pel mètode de linealització.
- Trobeu el valor de k per tal que $V(x, y) = kx^2 + y^2$ sigui una quantitat conservada. Quina és l'estabilitat del $(0, 0)$ com a punt d'equilibri?
- Sigui $(x(t), y(t))$ la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (\sqrt{2}, 0)$. Quin és el límit d'aquesta solució quan $t \rightarrow +\infty$? I quan $t \rightarrow -\infty$?
- Què podem dir de l'estabilitat dels punts d'equilibri trobats a l'apartat (a), en els casos en què l'apartat (b) no decideix? [Ind.: Un dibuix del retrat de fases us pot ajudar.]

Solució:

- Escrivint el camp vectorial associat com a $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, hem de resoldre el sistema $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, és a dir, $y(y - 2x) = 4x(2x - y) = 0$. Fàcilment veiem que els punts d'equilibri són tots els de la recta $y = 2x$.
- En un punt $(a, 2a)$ de la recta de punts d'equilibri, la matriu jacobiana és

$$D\vec{F}(a, 2a) = \begin{pmatrix} -2y & 2y - 2x \\ 16x - 4y & -4x \end{pmatrix} \Big|_{(a, 2a)} = \begin{pmatrix} -4a & 2a \\ 8a & -4a \end{pmatrix}$$

que té determinant $D = 0$ i traça $T = -8a$. Per tant,

- si $a < 0$ tenim un valor propi 0 i l'altre positiu i per tant el punt $(a, 2a)$ és inestable, i és no repulsor pel fet que tenim tota una recta de punts d'equilibri;
 - si $a \geq 0$ tenim un valor propi 0 i l'altre negatiu, o el valor propi doble 0, i per tant la linealització no decideix.
- (c) Calculem la derivada temporal:

$$W(x, y) = V_x \cdot P + V_y \cdot Q = 2kx(y^2 - 2xy) + 2y(8x^2 - 4xy) = (2k - 8)xy(y - 2x).$$

Escollint $k = 4$ tenim $W \equiv 0$ i llavors V és una quantitat conservada. Deduïm que el $(0, 0)$ és estable no atractiu (si $k > 0$ podem usar V com a funció de Lyapunov ja que és definida positiva en aquest punt).

- Les òrbites són contingudes en corbes de nivell $V(x, y) = \text{const}$, que són el·lipses. La que passa per $(\sqrt{2}, 0)$ és $4x^2 + y^2 = 8$. Tallant aquesta el·lipse amb la recta de punts d'equilibri $y = 2x$, obtenim els punts $(1, 2)$ i $(-1, -2)$, i l'òrbita és la meitat de l'el·lipse definida per $y < 2x$, la qual es recorre en sentit antihorari ja que $\vec{F}(\sqrt{2}, 0) = (0, 16)$ té la segona component positiva (l'altra meitat es recorre en sentit horari). Els límits demanats són els dos punts d'equilibri sobre l'el·lipse:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (1, 2), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (-1, -2).$$

- Cada el·lipse $4x^2 + y^2 = \text{const}$ ve dividida en dues meitats per la recta de punts d'equilibri $y = 2x$. La meitat inferior-dreta es recorre en sentit antihorari, i la meitat superior-esquerra en sentit horari. Llavors els punts d'equilibri $(a, 2a)$ amb $a > 0$ són estables no atractors.

p2

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a la distribució de temperatures en una barnilla amb una font de calor variable,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 23 e^{-2t} \cos(5x), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin x - \sin(3x) + \cos(5x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = e^{-2t}, & t > 0, \\ u(\pi, t) = -e^{-2t}, & t > 0. \end{cases}$$

- (a) Trobeu una solució particular de l'EDP, de la forma $u_p(x, t) = e^{-2t}(a \cos(5x) + b \sin(5x))$. Fent el canvi $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$, obtenim un nou problema de la forma

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Determineu la funció $g(x)$.

- (b) Resoleu el nou problema obtingut a l'apartat (a) usant separació de variables, i deduiu-ne la solució $u(x, t)$ del problema original.

Solució:

- (a) Si imposem que $u_p(x)$ sigui solució de l'EDP original, obtenim

$$-2 e^{-2t}(a \cos(5x) + b \sin(5x)) - e^{-2t}(-25a \cos(5x) - 25b \sin(5x)) = 23 e^{-2t} \cos(5x).$$

Igualant coeficients, obtenim $-2a + 25a = 23$, $-2b + 25b = 0$ i per tant $a = 1$, $b = 0$. Tenim així la solució particular $u_p(x, t) = e^{-2t} \cos(5x)$, que també satisfà les condicions de contorn.

La nova funció incògnita $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$ ha de ser solució del problema amb l'EDP i les condicions de contorn homogènies, i la condició inicial ve donada per

$$v(x, 0) = u(x, 0) - u_p(x, 0) = 3 \sin x - \sin(3x) = g(x)$$

- (b) Suprimint inicialment la condició inicial, tenim un problema homogeni i en busquem solucions per separació de variables, $v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. D'aquesta manera, obtenim 2 EDOs amb algunes condicions addicionals:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

En el primer cas tenim un PVF que té com a valors propis $\lambda_n = -n^2$ i funcions pròpies $X_n(x) = \sin(nx)$, $n \geq 1$. Substituint a l'altra EDO obtenim $T_n(t) = e^{-n^2 t}$. Els modes normals són $v_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $n \geq 1$, i caldria buscar la solució com a combinació lineal infinita d'aquests modes normals, és a dir, $v(x, t) = \sum_{n \geq 1} d_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$.

Imposant la condició inicial veiem per inspecció directa que $d_1 = 3$, $d_3 = -1$ i $d_n = 0$, per a $n \neq 1, 3$.

Tornant al problema original, la solució és $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t) = e^{-2t} \cos(5x) + 3 e^{-t} \sin x - e^{-9t} \sin(3x)$

q1 Determineu, en funció del paràmetre μ , si el sistema lineal $X' = \begin{pmatrix} \mu^2 & -\mu \\ \mu^2 + 3 & -\mu - 2 \end{pmatrix} X$ és estable o inestable, indicant també si és en algun cas és atractiu o repulsiu.

Resposta: estable atractiu si $0 < \mu < 3/2$
 estable no atractiu si $\mu = 0$ o $\mu = 3/2$
 inestable no repulsiu si $\mu < 0$ o $\mu > 3/2$

Justificació:

Calculem la traça i el determinant: $T = \mu^2 - \mu - 2 = (\mu + 1)(\mu - 2)$, $D = -\mu^2(\mu + 2) + \mu(\mu^2 + 3) = \mu(3 - 2\mu)$. En funció de μ , podem determinar l'estabilitat:

- * si $0 < \mu < 3/2$, tenim $D > 0$ i $T < 0$ i per tant és atractiu;
- * si $\mu = 0$ o $\mu = 3/2$, tenim $D = 0$ i $T < 0$ (degenerat amb un valor propi negatiu) i per tant és estable no atractiu;
- * si $\mu < 0$ o $\mu > 3/2$, tenim $D < 0$ (una sella) i per tant és inestable no repulsiu.

q2 Determineu els valors del paràmetre a per als quals l'origen és un punt d'equilibri repulsiu del sistema d'EDOs

$$x' = ax^3 - x^5y^2, \quad y' = ay - x^2y^3.$$

[Ind.: Useu $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ com a funció de Lyapunov.]

Resposta: $a > 0$

Justificació:

Provem primer amb el mètode de linealització. La matriu jacobiana és $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, que té valors propis $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = a$. Quan $a \leq 0$ no decideix, i quan $a > 0$ ens diu que l'origen és inestable però no permet assegurar que sigui repulsiu. Aplicant el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (que té un mínim local estricte a l'origen) obtenim $W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), \vec{F}(x, y) \rangle = x(ax^3 - x^5y^2) + y(ay - x^2y^3) = (x^4 + y^2)(a - x^2y^2)$, i per tant:

- si $a < 0$, tenim W definida negativa i l'origen és atractiu;
- si $a = 0$, tenim W semi-definida negativa i l'origen és estable;
- si $a > 0$, tenim W definida positiva (ja que $W(x, y) > 0$ per a (x, y) proper al $(0, 0)$) i l'origen és repulsiu.

q3 Trobeu la solució del problema
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sabent que és de la forma $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.

Resposta: $u(x, t) = \sin x \cdot (\cos t + \sin t)$

Justificació:

Fent la substitució, obtenim

$$\begin{cases} X(x)T''(t) = X''(x)T(t), & (1) \\ T(0)X(x) = \sin x, & (2) \\ T'(0)X(x) = \sin x, & (3) \\ X(0) = X(\pi) = 0. & (4) \end{cases}$$

De (2) i (3) deduïm que $T(0)$ i $T'(0)$ són iguals, i no poden ser 0. Anomenant $a = T(0) = T'(0)$, obtenim $X(x) = \frac{1}{a} \sin x$, que clarament compleix (4). Substituint en (1), obtenim l'EDO $T''(t) = -T(t)$ amb la condició $T(0) = T'(0) = a$, que té com a solució $T(t) = a(\cos t + \sin t)$. Així, la solució buscada és $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) = \sin x \cdot (\cos t + \sin t)$.

Alternativament, podem desglossar el problema inicial en suma de dos problemes amb una única condició no homogènia, i aplicar el mètode de separació de variables a cadascun (el PVF és el mateix en els dos casos i, en cadascun, la solució ve donada per un únic mode normal).