

Puntuacions

- * **Test (t1 – t4):** respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.20 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s’ha marcat, o si no se n’ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Problemes: p1** → 4 punts, **p2** → 3.5 punts,
- * **Qüestions (q1 – q3):** 1.5 punts cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d’escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).

Nota màxima: **16 punts**

t1 Si $x(t)$ és la solució de l'EDO $x' = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 4)^2 \sin x$ amb la condició inicial $x(0) = x_0$, quin és el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$?

.....

Solució: Definint la funció $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 4)^2 \sin x$, els seus zeros són els punts d’equilibri de l’EDO: 1, 2, 4 i tots els $k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$. El signe de $f(x)$ és el mateix que el de la funció $\sin x$ a tot $\mathbb{R}$, excepte que també s’anul·la als punts 1, 2 i 4. Llavors, si $f(x_0) > 0$ la solució $x(t)$ tendirà cap al punt d’equilibri més proper situat a la dreta de x_0 , i si $f(x_0) < 0$ la solució $x(t)$ tendirà cap al punt d’equilibri més proper situat a l’esquerra de x_0 .

t2 Trobeu el valor de $y(1)$ per a la solució $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ del sistema no homogeni $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ amb la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, sabent que $\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix}$ és una matriu fonamental de la part homogènia del sistema.

.....

Solució: Aplicant el mètode de variació de constants, tindrem una solució particular $X_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$. Plantegem el sistema $\Phi(t) \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ que reescrivim, simplificant, com a $\begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obtenim $u_1'(t) = 1$ i $u_2'(t) = 0$. Integrant tenim $u_1(t) = t$ i $u_2(t) = 0$, i una solució particular $X_p(t) = t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solució general és $X(t) = X_p(t) + \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Imposant la condició inicial, resulta el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, que té com a solució $c_1 = \alpha$, $c_2 = 0$. Així obtenim $X(1) = X_p(1) + \Phi(1) \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}$, i per tant $y(1) = (1 + \alpha)e$.

t3 Considereu el sistema lineal homogeni de matriu $A_\mu = \begin{pmatrix} 3\mu & 4\mu \\ k & k \end{pmatrix}$, on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu (suposant k fixada) tots els valors de μ per als quals aquest sistema és un node repulsor.

.....

Solució: Calculem la traça, el determinant i el discriminant de la matriu:

$$T = 3\mu + k, \quad D = -k\mu, \quad \Delta = T^2 - 4D = 9\mu^2 + 10k\mu + k^2.$$

Tindrem un node repulsor quan $T > 0$, $D > 0$ i $\Delta \geq 0$. Per a cada valor $k \neq 0$ fixat, mirem per a quins valors de μ es compleixen aquestes desigualtats (descartem el cas $k = 0$ en què no podem tenir $D > 0$). Notem que T , D i Δ canvien de signe quan $\mu = -k/3$, quan $\mu = 0$, i quan $\mu = -k/9$ o $\mu = -k$, respectivament. Així podem veure, en funció de k , els valors de μ per als quals tenim un node repulsor:

- * si $k > 0$, quan $-k/9 \leq \mu < 0$;
- * si $k < 0$, quan $\mu \geq -k$.

t4 Considereu el problema següent per a l'equació d'ones en el cas d'una corda infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos(2x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Quin valor té la solució a la posició x i temps $t = \pi/8$?

.....
Solució: Aplicant la fórmula de D'Alembert amb $c = 2$, $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos(2x)$, obtenim:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds = \frac{1}{2}(\sin(x+2t) + \sin(x-2t)) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \cos(2s) \, ds \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+2t) + \sin(x-2t)) + \frac{1}{8}(\sin(2x+4t) - \sin(2x-4t)). \end{aligned}$$

Llavors,

$$u(x, \pi/8) = \frac{1}{2}(\sin(x + \pi/4) + \sin(x - \pi/4)) + \frac{1}{8}(\sin(2x + \pi/2) - \sin(2x - \pi/2)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{1}{4} \cos(2x).$$

p1 Considereu, al pla de coordenades $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, el sistema lineal $X' = AX$ de matriu $A = \begin{pmatrix} 2\mu & \mu+1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, on $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

(a) Classifiqueu el sistema en funció del paràmetre μ .

Als apartats (b, c, d), denotem $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució que compleix la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Trobeu tots els valors de μ per als quals $X(t)$ tendeix a l'origen quan $t \rightarrow -\infty$.

(c) Trobeu tots els valors de μ per als quals $X(t)$ tendeix a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$.

(d) En el cas $\mu = -1$, quin és el límit de $X(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$?

[Ind.: Un dibuix del retrat de fase us pot ser útil; no cal que trobeu la solució explícitament.]

A l'apartat (e), denotem $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$ la solució que compleix la condició inicial $\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) En el cas $\mu = 2$, la solució $\tilde{X}(t)$ talla l'eix y ? [Justifiqueu la resposta.]

[Ind.: Un dibuix del retrat de fase us pot ser útil; no cal que trobeu la solució explícitament.]

Solució:

(a) Calculem la traça, el determinant i el discriminant:

$$T = 2\mu, \quad D = -4(\mu+1), \quad \Delta = T^2 - 4D = 4\mu^2 + 16\mu + 16 = 4(\mu+2)^2.$$

Notem que $\Delta > 0$ per a tot μ , excepte que $\Delta = 0$ quan $\mu = -2$. Observant també els signes de T i D , tenim:

- * un node propi atractiu si $\mu < -2$ o si $-2 < \mu < -1$,
- * un node impropri atractiu si $\mu = -2$ (ja que la matriu no diagonalitza),
- * un sistema degenerat si $\mu = -1$ (un valor propi 0 i l'altre negatiu),
- * una sella si $\mu > -1$.

(b) Per a $\mu < -1$ (node atractiu) o $\mu = -1$ (degenerat amb valors propis 0 i negatiu), cap solució (llevat de la trivial) no tendeix a l'origen quan $t \rightarrow -\infty$. Per a $\mu > -1$ (sella), caldrà que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sigui vector propi de valor propi positiu de la matriu: calculant $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\mu+1 \\ 12 \end{pmatrix}$, hem de tenir $(7\mu+1)/3 = 12/1$, és a dir $\mu = 5$, i llavors el valor propi és $12 > 0$. Per tant, l'únic cas és $\mu = 5$.

(c) Per a $\mu < -1$ (node atractiu), qualsevol solució tendeix a l'origen quan $t \rightarrow +\infty$. Per a $\mu > -1$ (sella) i $\mu = -1$ (degenerat amb valors propis 0 i negatiu), caldria que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ fos vector propi de valor propi negatiu de la matriu, però ja hem vist a (b) que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ només és vector propi quan $\mu = 5$, però que llavors el valor propi és positiu. Per tant, la resposta és $\mu < -1$.

(d) Tenim un sistema degenerat. La matriu $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ té valors propis 0 i -2 , amb vectors propis $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ que corresponen, respectivament, a la recta de punts d'equilibri i a la direcció atractora. La recta de punts d'equilibri és $x = 0$ (l'eix y). Totes les òrbites que no són punts d'equilibri són semirectes contingudes en rectes de la forma $y = -2x + c$ (de pendent -2), i el límit quan $t \rightarrow +\infty$ és el punt d'equilibri que es troba sobre aquesta recta. En el cas de la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, tenim la recta $y = -2x + 7$, i fent la intersecció amb $x = 0$ obtenim el punt $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(e) Tenim una sella. La matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ té valors propis -2 i 6 , amb vectors propis $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ que corresponen, respectivament, a les direccions atractora i repulsora. La solució $\tilde{X}(t)$ amb $\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no talla l'eix y , perquè hauria de travessar el primer o el tercer quadrant, i per tant tallaria la recta repulsora o la recta atractora, contradient el teorema d'existència i unicitat.

p2 Considerem el problema següent per a una corda vibrant sotmesa a una força externa,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4 \sin(2t) + 25 \sin(5x), & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 1, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = -2, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 1 - \sin(2t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Trobeu una solució particular de l'EDP, que sigui de la forma $u_p(x, t) = z(t) + w(x)$, i que també satisfaci les dues condicions de contorn i una de les condicions inicials (deduïu quina).

(b) La nova funció incògnita $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$ serà solució d'un problema de la forma

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ v_t(x, 0) = g(x), & x \in (0, \pi), \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quines són les funcions $f(x)$ i $g(x)$?

(c) Trobeu la solució $v(x, t)$ del nou problema, i la solució $u(x, t)$ del problema original.

Solució:

(a) Substituint a l'EDP, s'ha de complir que $z''(t) - w''(x) = 4 \sin(2t) + 25 \sin(5x)$, i per tant fem que $z''(t) = 4 \sin(2t)$ i $w''(x) = -25 \sin(5x)$. Integrant dos cops, obtenim $u_p(x, t) = -\sin(2t) + c_1 t + \sin(5x) + c_2 x + c_3$, on c_1, c_2, c_3 són constants d'integració.

Mirem si és possible satisfer les condicions inicials: tenim $u_p(x, 0) = \sin(5x) + c_2 x + c_3$, $(u_p)_t(x, 0) = -2 + c_1$. No és possible satisfer la primera, però sí la segona, si escollim $c_1 = 0$.

Ara mirem de satisfer les condicions de contorn: $u_p(0, t) = -\sin(2t) + c_3$, $u_p(\pi, t) = -\sin(2t) + c_2 \pi + c_3$ (hem suposat $c_1 = 0$) i per tant escollim $c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Així tenim $u_p(x, t) = 1 - \sin(2t) + \sin(5x)$.

(b) La nova EDP per a $v = u - u_p$ és l'homogènia. Per obtenir les noves condicions inicials i de contorn, restem les que satisfan u i u_p . En el cas que coincideixin, dóna 0 i obtenim condicions homogènies. L'única no homogènia és: $v(x, 0) = u(x, 0) - u_p(x, 0) = 1 - (\sin(5x) + 1) = -\sin(5x)$. Per tant, al nou problema tenim $f(x) = -\sin(5x)$ i $g(x) \equiv 0$.

(c) Apliquem el mètode de separació de variables, suprimint inicialment la condició no homogènia i busquem solucions del tipus $v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Obtenim els problemes:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

En el primer cas tenim un problema amb valors a la frontera, que té valors propis $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$, i funcions pròpies $X_n(x) = \sin(nx)$. Aplicant aquests valors propis al segon problema, tenim l'EDO $T''(t) + n^2 T(t) = 0$, que té la solució general $T(t) = c_1 \cos(nt) + c_2 \sin(nt)$ i, imposant $T'(0) = 0$ obtenim $c_2 = 0$ i per tant podem donar com a solució $T_n(t) = \cos(nt)$.

Així doncs, els modes normals són $v_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin(nx) \cdot \cos(nt)$ i la solució que busquem serà de la forma $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx) \cdot \cos(nt)$. Cal trobar els coeficients d_n de manera que es compleixi

la condició no homogènia $v(x, 0) = -\sin(5x)$, i per inspecció veiem que $d_5 = -1$ i $d_n = 0$ per a tot $n \neq 5$. Per tant, tenim $v(x, t) = -v_5(x, t)$ i, sumant-hi la solució particular, obtenim

$$u(x, t) = u_p(x, t) - v_5(x, t) = 1 - \sin(2t) + \sin(5x)(1 - \cos(5t)).$$

q1 Donat el sistema d'EDOs $X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, considereu les solucions $X^{(1)}(t)$ i $X^{(2)}(t)$ que compleixen les condicions inicials $X^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $X^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trobeu la diferència $X^{(1)}(5) - X^{(2)}(5)$.

.....

Resposta: $X^{(1)}(5) - X^{(2)}(5) = \begin{pmatrix} 2e^{15} \\ e^{15} \end{pmatrix}$

Justificació:

Com que són solucions d'un mateix sistema lineal no homogeni, la diferència $X(t) = X^{(1)}(t) - X^{(2)}(t)$ és solució del sistema homogeni associat, amb la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matriu del sistema té els valors propis 3 i -2, amb vectors propis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivament. Com que $X(0)$ es troba sobre la direcció repulsora, directament podem dir que $X(t) = e^{3t}X(0)$ i per tant $X(5) = e^{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

q2 Donat el sistema d'EDOs $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$, definit pel camp vectorial $\vec{F} = (P, Q) = (2y, -16x + 4x^3)$, trobeu tots els seus punts d'equilibri i la seva estabilitat. [Ind.: Quan sigui necessari, podeu usar com a funció de Lyapunov un potencial escalar del camp conservatiu $\vec{G} = (-Q, P)$ (és a dir, una funció $V(x, y)$ que tingui com a derivades parcials les components del camp $\vec{G}$).]

.....

Resposta: (0, 0) estable no atractor
(±2, 0) inestables no repulsors

Justificació:

Plantejant el sistema $2y = 0$, $-16x + 4x^3 = 0$, trobem que hi ha 3 punts d'equilibri: (0, 0), (±2, 0). La matriu del sistema linealitzat, en els 3 punts, és: $D\vec{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}$, $D\vec{F}(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}$, que en el cas del punt (0, 0) té valors propis amb part real zero i per tant no decideix, i en el cas dels punts (±2, 0) té valors propis reals de diferent signe i per tant aquests punts són inestables no repulsors.

Per al (0, 0), prenem com a funció de Lyapunov $V(x, y) = 8x^2 - x^4 + y^2$, que és un potencial escalar de $\vec{G} = (16x - 4x^3, 2y)$ (notem que V és definida positiva al (0, 0) ja que val 0 en aquest punt i hi té un mínim relatiu estricte). La seva derivada temporal és $W = V_x \cdot P + V_y \cdot Q = -Q \cdot P + P \cdot Q \equiv 0$, i per tant deduïm que el (0, 0) és estable no atractor.

q3 Sigui $u(x, t)$ la solució del problema
$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 3, & t > 0, \\ u(x, 0) = x^2 - 2, & 0 < x < 3, \\ u(0, t) = -2, & t > 0, \\ u(3, t) = 7, & t > 0. \end{cases}$$

Definint la funció $G(t) = \int_0^3 (u(x, t))^2 dx$, calculeu $G'(0)$.

.....

Resposta: $G'(0) = 48$

Justificació:

Derivem, usant que $u(x, t)$ és solució de l'EDP, a continuació integrem per parts, i després usem les condicions de contorn:

$$\begin{aligned} G'(t) &= 2 \int_0^3 u(x, t) u_t(x, t) dx = 8 \int_0^3 u(x, t) u_{xx}(x, t) dx = 8 \left(u(x, t) u_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=3} - \int_0^3 (u_x(x, t))^2 dx \right) \\ &= 8 \left(7u_x(3, t) + 2u_x(0, t) \right) - \int_0^3 (u_x(x, t))^2 dx. \end{aligned}$$

Finalment avaluem a $t = 0$. Derivant la condició inicial respecte x , resulta $u_x(x, 0) = 2x$ i obtenim:

$$G'(0) = 8 \left(7u_x(3, 0) + 2u_x(0, 0) \right) - \int_0^3 (u_x(x, 0))^2 dx = 8 \left(7 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - \int_0^3 (2x)^2 dx \right) = 48.$$
