

Nom i cognoms
(en MAJÚSCULES !)

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(A₁)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 23 Juny 2023

Temps: 2h 30min

Puntuacions

- * **Test (t1 – t5):** respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.20 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Problema:** p1 → 5 punts.
- * **Qüestions (q1 – q4):** 1.5 punts cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).

Nota màxima: 16 punts

t1 Considereu l'EDO $x' = x^n(x - 1)^m$ amb una condició inicial $x(0) = x_0$. Per a quins valors de x_0 tenim $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$?

Solució: Només cal observar que els punts d'equilibri són 0 i 1 i, fora d'aquests punts, mirar el signe de la funció $f(x) = x^n(x - 1)^m$ als intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, 1)$, per veure quan una solució $x(t)$ amb condició inicial x_0 en un d'aquests intervals tendeix a 0. Hi afegirem el punt d'equilibri $x_0 = 0$, ja que dona una solució constant i també tendeix a 0. En funció de n, m tenim:

- * Si n, m senars, tenim $f(x) > 0$ a $(-\infty, 0)$ i $f(x) < 0$ a $(0, 1)$. Per tant $x(t)$ creix a $(-\infty, 0)$ i decreix a $(0, 1)$, i tendirà a 0 en ambdós casos, és a dir quan $x_0 \in (-\infty, 1)$.
- * Si n senar i m parell, tenim $f(x) < 0$ a $(-\infty, 0)$ i $f(x) > 0$ a $(0, 1)$. Per tant $x(t)$ decreix a $(-\infty, 0)$ i creix a $(0, 1)$ i no tendirà a 0 en cap dels dos casos, només quan $x_0 = 0$.
- * Si n parell i m senar, tenim $f(x) < 0$ a $(-\infty, 0)$ i $(0, 1)$. Per tant $x(t)$ decreix, i tendirà a 0 si $x_0 \in [0, 1)$.
- * Si n, m parells, tenim $f(x) > 0$ a $(-\infty, 0)$ i $(0, 1)$. Per tant $x(t)$ creix, i tendirà a 0 si $x_0 \in (-\infty, 0]$.

De fet en el primer i segon casos el punt d'equilibri 0 és atractor i repulsor respectivament, i en els altres dos casos és inestable no repulsor (atractor per un costat i repulsor per l'altre).

t2 Siguin $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ dues solucions del sistema lineal no homogeni $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, que compleixen les condicions inicials $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivament. Calculeu la diferència $y_1(t) - y_2(t)$.

Solució: La diferència de les dues solucions del sistema no homogeni, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_2(t) \\ y_1(t) - y_2(t) \end{pmatrix}$, és solució del sistema homogeni $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, amb la condició inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matriu té valors propis complexos $\lambda_{\pm} = 2 \pm i$. Un vector propi de valor propi λ_+ és $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Llavors, tenim un conjunt fonamental de solucions

$$Z^{(1)}(t) = e^{2t} \left[\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$
$$Z^{(2)}(t) = e^{2t} \left[\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

La solució general ve donada per $c_1 Z^{(1)}(t) + c_2 Z^{(2)}(t)$, i imposant la condició inicial trobem $c_1 = 2$ i $c_2 = 2 - x_0$. Per tant, $y(t) = y_1(t) - y_2(t) = e^{2t}(2 \cos t + (2 - x_0) \sin t)$.

Nota: Si resollem el sistema no homogeni, podem usar que té una solució constant $\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ i no cal aplicar variació de constants.

t3 Considerem el sistema lineal homogeni 2D donat per la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & \mu - 2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors del paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$ per als quals el sistema és d'un tipus o altre.

Solució: Calculem la traça, el determinant i el discriminant. Les bifurcacions vénen associades a canvis de signe en aquests valors,

$$T = \mu - 1, \quad D = \mu^2 + \mu - 2 = (\mu + 2)(\mu - 1), \quad \Delta = T^2 - 4D = -3\mu^2 - 6\mu + 9 = -3(\mu + 3)(\mu - 1).$$

Tenim doncs bifurcacions per a $\mu = -3, -2, 1$. En funció de μ tenim el següent,

- * $\mu < -3$: $T < 0, D > 0, \Delta < 0 \implies$ focus atractor
- * $\mu = -3$: $T < 0, D > 0, \Delta = 0$ i no diag. $\implies$ node impropï atractor
- * $-3 < \mu < -2$: $T < 0, D > 0, \Delta > 0 \implies$ node propi atractor
- * $\mu = -2$: $T < 0, D = 0 \implies$ degenerat amb un valor propi 0 i l'altre < 0
- * $-2 < \mu < 1$: $D < 0 \implies$ sella
- * $\mu = 1$: $T = 0, D = 0$ i no diag. $\implies$ degenerat amb valor propi doble 0 i no diag.
- * $\mu > 1$: $T > 0, D > 0, \Delta < 0 \implies$ focus repulsor

t4 Donat el sistema $x' = bx - 4 \sin x - y, \quad y' = -2x + e^{bx} - 1 + xy$ aplicant el mètode de linealització determineu si l'origen és un punt d'equilibri estable (E), inestable (I), atractor (A), repulsor (R), o si no es pot decidir amb aquest mètode.

Solució: El sistema ve definit pel camp vectorial $\vec{F}(x, y) = (bx - 4 \sin x - y, -2x + e^{bx} - 1 + xy)$, i la seva matriu jacobiana a l'origen és $D\vec{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} b-4 & -1 \\ b-2 & 0 \end{pmatrix}$, que té traça $T = b - 4$ i determinant $D = b - 2$. Llavors, de l'origen podem dir:

- * si $b < 2$, és I no R
- * si $2 < b < 4$ és A
- * si $b > 4$ és R
- * si $b = 2$ o $b = 4$, no decideix

t5 Considerem el següent problema per a l'equació d'ones de la corda infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = (48t - 32t^3)e^{-x}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = A + \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sabent que l'EDP té $u_p(x, t) = 8t^3 e^{-x}$ com a una solució particular de l'EDP, trobeu el valor de la solució $u(x, t)$ del problema, quan $x = \pi$ i $t = \pi/2$.

Solució: La funció $w(x, t) = u(x, t) - u_p(x, t)$ és solució de l'equació homogènia, amb les mateixes condicions inicials ja que la solució particular compleix $u_p(x, 0) = (u_p)_t(x, 0) = 0$. Tenim doncs, com a nou problema,

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ w_t(x, 0) = A + \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicant la fórmula de D'Alembert, la solució d'aquest problema és

$$w(x, t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} (A + \cos z) dz = At + \frac{1}{4}(\sin(x+2t) - \sin(x-2t)),$$

i tenim $w(\pi, \pi/2) = \frac{\pi}{2} A$. Per tant, per a la solució $u = u_p + w$ del problema original tenim $u(\pi, \pi/2) = \pi^3 e^{-\pi} + \frac{\pi}{2} A$.

p1 Considereu el següent sistema no lineal al pla, depenent d'un paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$x' = \mu x - 2xy, \quad y' = -2y + x^2.$$

- Determineu quants punts d'equilibri té aquest sistema en funció de μ , i trobeu-los.
- Suposeu $\mu \neq 0$. Per a cada punt d'equilibri trobat a l'apartat (a), classifiqueu el sistema linealitzat en funció del paràmetre μ i, si és possible, determineu la seva estabilitat en el sistema no lineal pel mètode de linealització.
- Considereu ara el cas $\mu = 0$. Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri, aplicant si és possible el mètode de linealització o, en cas contrari, usant alguna funció de Lyapunov de la forma $V(x, y) = \alpha x^2 + y^2$.
- Determineu, en funció de $\mu \in \mathbb{R}$, la regió del pla on el sistema contrau àrees.

Solució:

- Hem d'anul·lar les dues components del camp vectorial. De la segona obtenim $y = x^2/2$ i, substituint a la primera, resulta $\mu x - x^3 = 0$ i per tant $x = 0$ o bé $x^2 = \mu$. Per tant,
 - * si $\mu \leq 0$ l'únic punt d'equilibri és el $(0, 0)$;
 - * si $\mu > 0$ tenim 3 punts d'equilibri: $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{\mu}, \mu/2)$.
- Calculem la matriu jacobiana: $J(x, y) = \begin{pmatrix} \mu - 2y & -2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$, i l'avaluem als punts d'equilibri:
 - * $J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
 - si $\mu < 0$ el sistema linealitzat és un node propi atractiu i per tant el $(0, 0)$ és atractiu en el sistema no lineal
 - si $\mu > 0$ el sistema linealitzat és una sella i per tant el $(0, 0)$ és inestable no repulsor en el sistema no lineal
 - * $J(\pm\sqrt{\mu}, \mu/2) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2\sqrt{\mu} \\ \pm 2\sqrt{\mu} & -2 \end{pmatrix}$, que té $T = -2 < 0$, $D = 4\mu > 0$ i $\Delta = T^2 - 4D = 4 - 16\mu$
 - si $0 < \mu < 1/4$ el sistema linealitzat és un node propi atractiu
 - si $\mu = 1/4$ el sistema linealitzat és un node impropri atractiu (ja que la matriu no és diagonal)
 - si $\mu > 1/4$ el sistema linealitzat és un focus atractiu
 - en tots els casos amb $\mu > 0$, els dos punts $(\pm\sqrt{\mu}, \mu/2)$ són atractius per al sistema no lineal
- Si $\mu = 0$, l'únic punt d'equilibri és l'origen, amb matriu jacobiana $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ que té valors propis 0 i -2, i per tant el mètode de linealització no decideix. Mirarem d'aplicar el mètode de Lyapunov amb una funció $V(x, y) = \alpha x^2 + y^2$. Aquesta només és definida positiva quan $\alpha > 0$. Llavors obtenim

$$W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), \vec{F}(x, y) \rangle = 2\alpha x \cdot (-2xy) + 2y \cdot (-2y + x^2) = -4\alpha xy^2 + (2 - 4\alpha)x^2y.$$
 Prenent $\alpha = 1/2$ obtenim $W(x, y) = -4y^2$ que és semi-definida negativa a l'origen, i per tant és un punt d'equilibri estable.
- El sistema contrau àrees quan la divergència del camp vectorial és negativa: $\text{div } \vec{F}(x, y) = \text{tr } J(x, y) = \mu - 2 - 2y < 0$, és a dir al semiplà $y > \mu/2 - 1$.

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 23 Juny 2023

Temps: 2h 30min

q1 Donat el sistema d'EDOs $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X$, trobeu:

* $\Phi(t)$ matriu fonamental,

* $X(t)$ solució que compleix la condició inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Són úniques les respostes? Per què?

Resposta:

$$\Phi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -t & -1 \end{pmatrix} \text{ (no única); } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-2t \end{pmatrix} \text{ (única)}$$

Justificació:

La matriu del sistema $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ té un valor propi doble $\lambda = -2$ i, com que la matriu no és diagonal, no diagonalitzarà ja que $1 = \text{mg}(2) < \text{ma}(2) = 2$. Aleshores, haurem de trobar una base de Jordan per obtenir les solucions del sistema d'EDOs: per exemple, prenem $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que no és vector propi i llavors $\vec{v} = (A + 2I)\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (que sí és vector propi). La solució general del sistema d'EDOs serà

$$X(t) = c_1 e^{-2t} (\vec{u} + t\vec{v}) + c_2 e^{-2t} \vec{v} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

amb $\Phi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -t & -1 \end{pmatrix}$ com una possible matriu fonamental, la qual no és única ja que qualsevol matriu de la forma $\Psi(t) = \Phi(t)M$, amb una matriu de canvi M (2×2) amb $\det M \neq 0$, serà també una matriu fonamental (de fet, cada matriu fonamental correspon a un conjunt fonamental de solucions).

Imposant la condició inicial a la solució general trobada anteriorment, tenim

$$X(0) = \Phi(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i resolent aquest sistema obtenim $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, i per tant la solució és $X(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-2t \end{pmatrix}$, la qual és única pel teorema d'existència i unicitat.

q2 Sigui $x(t)$ la solució del PVI

$$x'' = -x' - \frac{x}{f(t)}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

on $f(t)$ és una funció donada (tal que $f(0) \neq 0$). Definint la funció $h(t) = x(t)^2 + f(t)x'(t)^2$, calculeu el valor de $h'(0)$. [Ind.: El resultat depèn de $f(0)$ i $f'(0)$.]

Resposta:

$$f'(0) - 2f(0)$$

Justificació:

Derivem, i usem que $x(t)$ és solució de l'EDO,

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2x(t)x'(t) + f'(t)x'(t)^2 + 2f(t)x'(t)x''(t) \\ &= 2x(t)x'(t) + f'(t)x'(t)^2 + 2f(t)x'(t) \left(-x'(t) - \frac{x(t)}{f(t)} \right) = x'(t)^2 (f'(t) - 2f(t)). \end{aligned}$$

Avaluant en $t = 0$ i usant les condicions inicials, obtenim $h'(0) = f'(0) - 2f(0)$.

q3

Segui $u(x, t)$ la solució del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = 2, & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i considerem la funció $F(t) = \int_0^\pi u(x, t) u_t(x, t) dx$. Calculeu la derivada $F'(0)$.

[Ind.: Pot ser útil la integració per parts en algun moment. No és necessari que trobeu $u(x, t)$ explícitament.]

Resposta: -5π

Justificació:

Derivem la funció F , a continuació usem que $u(x, t)$ és solució de l'EDP, després integrem per parts la segona de les integrals, i usem les condicions de contorn (de Neumann homogènies):

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^\pi (u(x, t) u_t(x, t))_t dx = \int_0^\pi u_t(x, t)^2 dx + \int_0^\pi u(x, t) u_{tt}(x, t) dx = \int_0^\pi u_t(x, t)^2 dx + 9 \int_0^\pi u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= \int_0^\pi u_t(x, t)^2 dx + 9 \left(u(x, t) u_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi u_x(x, t)^2 dx \right) = \int_0^\pi (u_t(x, t)^2 - 9u_x(x, t)^2) dx. \end{aligned}$$

Avaluant en $t = 0$ i usant les condicions inicials, obtenim

$$F'(0) = \int_0^\pi (u_t(x, 0)^2 - 9u_x(x, 0)^2) dx = \int_0^\pi (2^2 - 9 \cdot 1^2) dx = -5\pi.$$

q4

Trobeu la solució $u(x, t)$ del problema següent,

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = \sin(2x), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2x) + 2\sin(3x), & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

[Ind.: busqueu una solució particular estacionària $u_p(x)$ de l'EDP i que satisfaci també les condicions de contorn, i plantegeu el problema per a $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$.]

Resposta: $\sin(2x) + 2e^{-9t/4}\sin(3x)$

Justificació:

Si impossem que la solució particular $u_p(x)$ sigui solució de l'EDP original, obtenim $0 - \frac{1}{4}u_p''(x) = \sin(2x)$, amb les condicions de contorn $u_p(0) = u_p(\pi) = 0$. Integrant dos cops, obtenim $u_p(x) = \sin(2x) + c_1x + c_2$, amb $c_1 = c_2 = 0$. Aleshores, $u_p(x) = \sin(2x)$, i la nova funció incògnita ha de ser solució del problema

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{4}v_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = 2\sin(3x), & 0 < x < \pi, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Suprimint inicialment la condició inicial, tenim un problema homogeni i en busquem solucions per separació de variables, $v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. D'aquesta manera, obtenim 2 EDOs amb algunes condicions addicionals:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0, & \end{cases} \quad T'(t) - \frac{1}{4}\lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

En el primer cas tenim un PVF que té com a valors propis $\lambda_n = -n^2$ i funcions pròpies $X_n(x) = \sin(nx)$, $n \geq 1$. Amb aquests valors de λ_n , obtenim com a solució del segon problema $T_n(t) = e^{\lambda_n t/4} = e^{-n^2 t/4}$. Els modes normals són $v_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $n \geq 1$, i caldria buscar la solució com a combinació lineal infinita d'aquests modes normals, és a dir, $v(x, t) = \sum_{n \geq 1} d_n e^{-n^2 t/4} \sin(nx)$. Imposant la condició inicial veiem per inspecció directa que $d_3 = 2$, i $d_n = 0$

per a tot $n \neq 3$. Tornant al problema original, la solució és $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t) = \sin(2x) + 2e^{-9t/4}\sin(3x)$.