

Nom i cognoms
(en MAJÚSCULES !)

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(A₁)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 25 Gen 2023

Temps: 2h 30min

Puntuacions

- * **Problema (p1):** 3 punts.
- * **Qüestions (q1, q2):** 1.5 punts cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).
- * **Test (t1 – t8):** respostes correctes +1 punt, incorrectes –0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

Nota màxima: 14 punts

t1 Considereu l'EDO $x' = \frac{x^2 - bx}{1 + x^2}$, on $b \in \mathbb{R}$ és un paràmetre, amb una condició inicial $x(0) = x_0$. Per a quins valors de x_0 tenim $x(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $x_0 \in (b, \infty)$ si $b < 0$, i $x_0 \in (0, \infty)$ si $b \geq 0$
- (b) $x_0 \in (b, \infty)$ per a qualsevol $b \in \mathbb{R}$
- (c) $x_0 \in (b, 0)$ si $b < 0$, $x_0 \in (0, b)$ si $b > 0$, i no hi ha cap x_0 si $b = 0$
- *(d) $x_0 \in (0, \infty)$ si $b \leq 0$, i $x_0 \in (b, \infty)$ si $b > 0$
- (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Els punts d'equilibri són 0 i b , i la funció $f(x) = \frac{x^2 - bx}{1 + x^2} = \frac{x(x - b)}{1 + x^2}$ és positiva a la dreta del “darrer” punt d'equilibri: a l'interval $(0, \infty)$ si $b \leq 0$, i a l'interval (b, ∞) si $b > 0$. La solució $x(t)$ tendirà a ∞ quan x_0 pertanyi a un d'aquests intervals, en funció de b .

t2 Trobeu el valor t^* pel qual la solució del PVI $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, satisfà $y(t^*) = 0$.

- (a) $t^* = \ln 5$ *(b) $t^* = (\ln 2)/10$ (c) no existeix t^* (d) $t^* = (\ln 3)/5$
- (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Els valors propis de A són 5 i -5 , amb vectors propis $(2, 1)$ i $(1, -2)$, respectivament. Per tant, una matriu fonamental del sistema és $M(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} & e^{-5t} \\ e^{5t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$, i la solució del PVI ha de ser de la forma $M(t)\vec{C}$. Imposant la condició inicial, hem de resoldre el sistema $M(0)\vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, i obtenim $\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, és a dir $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{5t} + e^{-5t} \\ e^{5t} - 2e^{-5t} \end{pmatrix}$. El valor t^* que busquem serà la solució de l'equació $y(t) = 0$, és a dir $e^{10t} = 2$. Per tant, $t^* = (\ln 2)/10$.

t3 Trobeu la solució general de l'EDO $x'' + 2x' + x = t^2$, sabent que té una solució particular de la forma $x_p(t) = d_1t^2 + d_2t + d_3$.

- (a) $4te^{-t} + c_1t^2 - 6c_2t$
- *(b) $t^2 - 4t + 6 + (c_1 + c_2t)e^{-t}$
- (c) $t^2 + 2t + 1 + c_1e^{-t} + c_2(1 + t)e^{-t}$
- (d) $\vec{w}(t) + e^{-t}(c_1\vec{u} + c_2t\vec{v})$ amb $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1)$, $\vec{w}(t) = (t^2, 2t)$
- (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Comencem considerant l'EDO homogènia $x'' + 2x' + x = 0$, que té polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ i per tant la seva solució general és $x_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$. Substituint la solució $x_p(t)$ proposada a l'EDO

no homogènia, tenim

$$x_p''(t) + 2x_p'(t) + x_p(t) = 2d_1 + 2(2d_1t + d_2) + (d_1t^2 + d_2t + d_3) = d_1t^2 + (4d_1 + d_2)t + (2d_1 + 2d_2 + d_3) = t^2.$$

Iguant coeficients, obtenim les equacions $d_1 = 1$, $4d_1 + d_2 = 0$, $2d_1 + 2d_2 + d_3 = 0$, un sistema 3×3 que té com a solució $d_1 = 1$, $d_2 = -4$, $d_3 = 6$, i per tant $x_p(t) = t^2 - 4t + 6$. Llavors, la solució general ve donada per $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$.

t4 Donat el sistema lineal $\vec{X}' = A\vec{X}$ amb matriu $A = \begin{pmatrix} 5-3\mu & \mu-3 \\ \mu+3 & -1 \end{pmatrix}$, per a quins valors del paràmetre μ el sistema és estable?

- (a) $-1 < \mu < 4/3$ *(b) $4/3 \leq \mu \leq 4$ (c) $4/3 \leq \mu < 4$ (d) $-1 < \mu \leq 4/3$
(e) cap de les anteriors

.....
Solució: Calculem $\text{tr } A = 4 - 3\mu$ i $\det A = -\mu^2 + 3\mu + 4$. Si el sistema és no degenerat, serà estable si $T \leq 0$ i $D > 0$. Per tant, ens caldrà $\mu \geq 4/3$ i $-1 < \mu < 4$, és a dir $4/3 \leq \mu < 4$.

Els casos degenerats (amb $D = 0$) són $\mu = -1$ i $\mu = 4$. D'aquests, quan $\mu = 4$ tenim un valor propi 0 i un altre de negatiu, i també és estable.

t5 Trobeu els valors del paràmetre $\beta \in \mathbb{R}$ per als quals el sistema lineal 2D donat per la matriu $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 2 \end{pmatrix}$ és un focus que gira en sentit antihorari.

- (a) $-1/2 < \beta < 0$ (b) $\beta > 1/2$ (c) $|\beta| > 1/2$ *(d) $\beta < -1/2$ (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Calculem el determinant, la traça i el discriminant: $T = 3 > 0$, $D = 2 + \beta^2 > 0$, $\Delta = T^2 - 4D = 1 - 4\beta^2$. Per tant tenim un focus (repulsor) si $\beta^2 > 1/4$, és a dir si $|\beta| > 1/2$. Perquè giri en sentit antihorari cal que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix}$ apunti cap amunt o, equivalentment, que el vector $\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix}$ apunti cap a l'esquerra, és a dir $\beta < 0$. Per tant, hem de tenir $\beta < -1/2$.

t6 Considereu el sistema no lineal $x' = 2y$, $y' = 3x^2$. Quina de les afirmacions següents és certa?
[Ind.: Observeu la funció $V(x, y) = y^2 - x^3$ és una quantitat conservada del sistema.]

- *(a) la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
(b) la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
(c) no hi ha cap solució que tendeixi a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
(d) la solució que compleix $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$
(e) cap de les anteriors

.....
Solució: Si una solució tendeix a $(0, 0)$, es trobarà sobre la corba de nivell per $(0, 0)$ de la funció V , que és la corba C definida per $x = y^{2/3}$, o també $y = \pm x^{3/2}$. Els punts $(1, \pm 1)$ pertanyen a C però el punt $(1, 0)$ no hi pertany. D'altra banda, observem que sobre C sempre tenim $y' > 0$ (excepte al $(0, 0)$), amb la qual cosa les solucions contingudes a C amb $y(0) < 0$ tendeixen a l'origen, i les solucions contingudes a C amb $y(0) > 0$ se n'allunyen.

t7 Considerem el problema següent, que correspon a l'equació de calor amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = a + \sin^2 t - e^{x^2} \cos t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) = \sin t - \cos^2 t, & t > 0, \\ u_x(1, t) = 2 + \sin 3t, & t > 0, \end{cases}$$

on $u_0(x)$ és una funció donada, i $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu el valor de a per al qual la temperatura mitjana $T(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$ és una funció 2π -periòdica. [Ind.: Comenceu calculant $T'(t)$.]

- *(a) $a = -3$ (b) $a = 0$ (c) $a = 2$ (d) $a = 4$ (e) cap de les anteriors

.....
Solució: La temperatura mitjana satisfà

$$\begin{aligned} T'(t) &= \int_0^1 u_t(x, t) dx = \int_0^1 \left(u_{xx}(x, t) + a + \sin^2 t - e^{x^2} \cos t \right) dx = u_x(1, t) - u_x(0, t) + a + \sin^2 t - A \cos t \\ &= 2 + \sin 3t - \sin t + \cos^2 t + a + \sin^2 t - A \cos t = 3 + \sin 3t - \sin t + a - A \cos t, \end{aligned}$$

on $A = \int_0^1 e^{x^2} dx$ és una constant. Integrant,

$$T(t) = C + (3 + a)t - \frac{1}{3} \cos 3t + \cos t - A \sin t,$$

on C és una altra constant (que es pot determinar a partir de la condició inicial). Per tal que $T(t)$ sigui periòdica, cal que $a = -3$.

t8 Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent per a l'equació d'ones amb domini infinit,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = (tx^2 - t^3 - 2x)e^{-tx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 1 + \cos x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Sabent que $u_p(x, t) = te^{-tx}$ és una solució particular de l'EDP, trobeu el valor de $u(\pi/3, \pi/3)$.

- (a) $\pi(2 - e^{-\pi^2/9})$ (b) $e^{-\pi^2/9}$ (c) $2\pi + \sqrt{3}e^{-\pi^2/9}$ *(d) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}e^{-\pi^2/9}$
 (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Escrivint $u(x, t) = u_p(x, t) + w(x, t)$ i tenint en compte que $u_p(x, 0) = 0$ i $(u_p)_t(x, 0) = 1$, obtenim per a $w(x, t)$ el problema següent amb l'EDP homògena,

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ w_t(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aplicant la fórmula de D'Alembert,

$$w(x, t) = \frac{1}{2} (\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos u du = \frac{1}{2} (\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2} (\sin(x+t) - \sin(x-t)) = \sin(x+t),$$

amb $w(\pi/3, \pi/3) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sumant-hi $u_p(\pi/3, \pi/3) = \frac{\pi}{3}e^{-\pi^2/9}$ obtenim el resultat.

p1 Considerem el següent problema de l'equació de calor 1D amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 25 \sin(5x/2), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(5x/2) + 3 \sin(7x/2), & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

- (a) Trobeu una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP que no depengui del temps, i que també satisfaci les condicions de contorn del problema. Formuleu el problema per a la nova funció incògnita $w(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$. Quina és la nova condició inicial?
- (b) Resoleu el nou problema per trobar $w(x, t)$, i a continuació trobeu la solució $u(x, t)$ del problema original.
- (c) Calculeu la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$, i el seu límit $T^* = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$.

Solució:

- (a) Si imposem que la solució particular $u_p(x)$ sigui solució de l'EDP original, obtenim $0 - 4u_p''(x) = 25 \sin(5x/2)$, amb les condicions de contorn $u_p(0) = 0$ i $u_p'(\pi) = 0$. Integrant dos cops, obtenim $u_p(x) = \sin(5x/2) + c_1x + c_2$ amb $c_1 = c_2 = 0$. Aleshores, $u_p(x) = \sin(5x/2)$, i la nova funció incògnita ha de ser solució del problema

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ w(x, 0) = 3 \sin(7x/2), & x \in (0, \pi), \\ w(0, t) = w_x(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

amb l'EDP homogènia, i la condició inicial és $w(x, 0) = 3 \sin(7x/2)$, $x \in (0, \pi)$.

- (b) Per trobar $w(x, t)$ utilitzarem el mètode de separació de variables, considerant solucions del tipus $w(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ per a la part homogènia del problema (és a dir, sense considerar la condició inicial que és l'única condició no homogènia). Obtenim els dos problemes següents per a les funcions $X(x)$ i $T(t)$,

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases} \quad T''(t) - 4\lambda T(t) = 0.$$

El primer és un PVF, que té els valors propis $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2$ i funcions pròpies $X_n(x) = \sin[(n + \frac{1}{2})x]$, per a $n \geq 0$. Amb aquests valors de λ_n , obtenim com a solució del segon problema $T_n(t) = e^{4\lambda_n t} = e^{-(2n+1)^2 t}$. Per tant, els modes normals de la part homogènia del problema són $w_n(x, t) = e^{-(2n+1)^2 t} \sin[(n + \frac{1}{2})x]$, de manera que qualsevol sèrie convergent del tipus $w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n(x, t)$ és també solució del problema homogeni. De fet, imposant la condició inicial $w(x, 0) = 3 \sin(7x/2)$ veiem que l'únic coeficient no nul és $d_3 = 3$, i per tant tenim $w(x, t) = 3w_3(x, t) = 3e^{-49t} \sin(7x/2)$. Finalment, sumem la solució particular trobada a l'apartat (a), i obtenim

$$u(x, t) = u_p(x) + w(x, t) = \sin(5x/2) + 3e^{-49t} \sin(7x/2).$$

- (c) Integrant la solució obtinguda a l'apartat (b), obtenim

$$T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(5x/2) dx + \frac{3}{\pi} e^{-49t} \int_0^\pi \sin(7x/2) dx = \frac{2}{5\pi} + \frac{6}{7\pi} e^{-49t},$$

i el límit és $T^* = \frac{2}{5\pi}$.

q1 Donat el PVI $\vec{X}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}$, $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, trobeu tots els valors del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals la solució $\vec{X}(t)$ tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

.....

Resposta: $\alpha \leq 0$

Justificació:

Sabent que els valors propis són α i -1 , tenim:

- * Si $\alpha < 0$, tenim un node atractor i per tant la solució tendeix a l'origen.
- * Si $\alpha = 0$, el sistema és degenerat amb un valor propi negatiu, i la solució tendeix a l'origen ja que $(1, -1)$ és vector propi de valor propi -1 , i per tant es troba sobre la direcció atractora.
- * Si $\alpha > 0$ tenim una sella, i cal que $(1, -1)$ sigui vector propi de valor propi -1 , és a dir $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que amb $\alpha > 0$ és impossible.

q2 El sistema no lineal $x' = y - x^3$, $y' = x^3(x-1) - y$ té dos punts d'equilibri. Trobeu-los i estudieu la seva estabilitat.

[Ind.: Quan calgui, podeu usar $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}$ com a funció de Lyapunov.]

.....

Resposta:
 $(0, 0)$ atractor
 $(2, 8)$ inestable no repulsor

Justificació:

Calculem els punts d'equilibri, com a zeros del camp vectorial $\vec{F}(x, y) = (y - x^3, x^3(x-1) - y)$. Tenim $y = x^3 = x^3(x-1)$ i per tant cal $x^3(x-2) = 0$. Així els punts d'equilibri són $(0, 0)$ i $(2, 8)$. La matriu jacobiana del camp vectorial és

$$D\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ 4x^3 - 3x^2 & -1 \end{pmatrix},$$

i en els dos punts d'equilibri és

$$D\vec{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D\vec{F}(2, 8) = \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 20 & -1 \end{pmatrix},$$

Com que tenim $\det D\vec{F}(2, 8) < 0$, el punt $(2, 8)$ té com a sistema linealitzat una sella i per tant és inestable no repulsor.

En canvi al punt $(0, 0)$ tenim els valors propis 0 i -1 i el mètode de linealització no decideix. Usant com a funció de Lyapunov la $V(x, y)$ proposada (la qual és definida positiva al $(0, 0)$), tenim:

$$W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), \vec{F}(x, y) \rangle = (x^3 - x^4)(y - x^3) + y(x^3(x-1) - y) = -y^2 - x^6 + x^7 = -y^2 - x^6(1 - x),$$

que és una funció definida negativa al $(0, 0)$, i per tant aquest punt és atractor.