

Nom i cognoms (en <u>MAJÚSCULES</u> !)

Columna (A,B,C,...)

Fila (1,2,3,...)

(A)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 17 Juny 2022

Temps: 2h 45min

Puntuacions

- * **Qüestions (q1 – q4):** 1.5 punts cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).
- * **Problema (p1):** 3 punts.
- * **Test (t1 – t6):** respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

Nota màxima: 15 punts

q1 Si $\vec{X}(t)$ és la solució del PVI

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calculeu $\vec{X}(\ln 2)$.

.....

Resposta:

$\vec{X}(\ln 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Justificació:

Els valors propis de la matriu del sistema són 1 i 2, amb vectors propis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivament. Per tant, una matriu fonamental del sistema és

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

i la solució del PVI ha de ser de la forma $\vec{X}(t) = M(t)C$. Imposant la condició inicial, hem de resoldre el sistema $M(0)C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obtenim $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, és a dir $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. Avaluant, resulta $\vec{X}(\ln 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

q2 Trobeu la solució general de l'EDO $x'' - 2x' - 8x = e^{3t}$. [Ind.: Una de les solucions de l'EDO és de la forma $x_p(t) = Ae^{bt}$.]

.....

Resposta:

$x(t) = -\frac{1}{5}e^{3t} + c_1e^{-2t} + c_2e^{4t}$
--

Justificació:

La part homogènia té com a polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$, amb arrels -2 i 4, i per tant la seva solució general és $x_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{4t}$. Només resta buscar una solució particular de l'EDO no homogènia: substituint $x_p(t) = Ae^{bt}$ a l'EDO obtenim

$$x_p''(t) - 2x_p'(t) - 8x_p(t) = A(b^2 - 2b - 8)e^{bt} = e^{3t},$$

i per tant hem d'escollir $b = 3$ i $A = -1/5$. Així doncs, la solució general és

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = -\frac{1}{5}e^{3t} + c_1e^{-2t} + c_2e^{4t}$$

(alternativament, podem aplicar el mètode variació de constants per trobar una solució particular).

q3 Considereu a $\mathbb{R}^2$ el sistema lineal homogeni $\vec{X}' = A\vec{X}$, amb la matriu $A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 3\mu \end{pmatrix}$. Trobeu tots els valors de μ per als quals el sistema és un focus.

.....

Resposta: $-1 < \mu < 0$ o $0 < \mu < 1$

Justificació:

El determinant, la traça i el discriminant són

$$D = 3\mu^2 + 1 > 0, \quad T = 4\mu, \quad \Delta = T^2 - 4D = 4\mu^2 - 4.$$

Tindrem un focus si $D > 0$, $T \neq 0$ i $\Delta < 0$, és a dir si $-1 < \mu < 1$ però $\mu \neq 0$.

q4 Considereu el problema següent, associat a l'equació d'ones

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 2x^3 - 3Lx^2, & x \in (0, L), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, L), \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $u(x, t)$ n'és solució, calculeu la seva mitjana: $h(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$. [Ind.: Comenceu calculant $h''(t)$. No cal que trobeu $u(x, t)$ explícitament.]

.....

Resposta: $h(t) \equiv -\frac{L^3}{2}$ (és constant)

Justificació:

Usant l'EDP, la regla de Barrow i les condicions de contorn,

$$h''(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_{tt}(x, t) dx = \frac{c^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) dx = \frac{c^2}{L} (u_x(L, t) - u_x(0, t)) = 0.$$

Això implica que $h'(t)$ és constant i, com que $u_t(x, 0) = 0$,

$$h'(t) = h'(0) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x, 0) dx = 0.$$

Llavors $h(t)$ és també constant, i val

$$h(t) = h(0) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, 0) dx = \frac{1}{L} \int_0^L (2x^3 - 3Lx^2) dx = -\frac{L^3}{2}.$$

p1 Considereu el sistema autònom

$$x' = -2x + x^2 + y^2, \quad y' = y^2 - x^2.$$

- (a) Trobeu les zones del pla on el sistema expandeix o contrau àrees.
(b) Trobeu tots els punts d'equilibri del sistema.
(c) Estudieu, on sigui possible, l'estabilitat de cada punt d'equilibri pel mètode de linealització.
(d) On la linealització no decideixi l'estabilitat, raoneu si l'apartat (a) permet deduir alguna informació sobre l'estabilitat del punt d'equilibri: Pot ser atractor? Pot ser repulsor? Pot ser un centre no lineal?
[Nota: No useu el mètode de Lyapunov.]
-

Solució:

- (a) L'expansió/contracció d'àrees ve donada pel signe de la divergència del camp vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (-2x + x^2 + y^2, y^2 - x^2).$$

La seva matriu jacobiana és $D\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -2 + 2x & 2y \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$ i tenim

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \operatorname{tr} D\vec{F}(x, y) = -2 + 2x + 2y.$$

Per tant, el sistema expandeix àrees quan $x + y > 1$, i contrau àrees quan $x + y < 1$.

- (b) Hem de resoldre el sistema

$$-2x + x^2 + y^2 = 0, \quad y^2 - x^2 = 0.$$

Per exemple, restant les dues equacions deduïm que $-2x + 2x^2 = 0$ i per tant $x = 0$ o $x = 1$. La segona equació ens diu que $y = \pm x$, i llavors els punts d'equilibri són $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(1, -1)$.

També ho podem veure reescriuint la primera equació com la circumferència $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, i trobar-ne la intersecció amb cadascuna de les rectes $y = \pm x$.

- (c) Avaluem la matriu jacobiana a cadascun dels punts d'equilibri,

$$D\vec{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\vec{F}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D\vec{F}(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- * Al punt $(0, 0)$ els valors propis són -2 i 0 i per tant no decideix.
 - * Al punt $(1, 1)$ tenim determinant > 0 i traça > 0 , i per tant és repulsor (el sistema linealitzat és un focus repulsor).
 - * Al punt $(1, -1)$ tenim determinant < 0 i per tant és inestable no repulsor (el sistema linealitzat és una sella).
- (d) Només hem d'estudiar-ho per al $(0, 0)$. Segons l'apartat (a), aquest punt es troba a la zona on el sistema contrau àrees ($x + y < 1$), i per tant no pot ser repulsor. Podria ser atractor o no (estable, o bé inestable no repulsor ja que la contracció d'àrees no permet descartar que alguna trajectòria s'allunyi del punt). No pot ser un centre no lineal ja que el sistema linealitzat no és un centre (de fet, si fos un centre no lineal prop del $(0, 0)$ tindríem òrbites periòdiques encerclant el punt, i aquest fet és incompatible amb la contracció d'àrees).
-

t1 Considereu l'EDO autònoma $x' = x^2(1 - x^2)$. Quina de les afirmacions següents és certa?

- (a) la solució amb condició inicial $x(0) = -2$ satisfà que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -1$
- (b) la solució amb condició inicial $x(0) = 1/2$ satisfà que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- (c) el punt d'equilibri -1 és inestable no repulsor
- * (d) el punt d'equilibri 0 és inestable no repulsor
- (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Només cal observar que els punts d'equilibri són -1 , 0 i 1 i que, fora d'aquests punts, la funció $f(x) = x^2(1 - x^2)$ és positiva als intervals $(-1, 0)$ i $(0, 1)$ (i per tant $x(t)$ creix), i és negativa a les semirectes $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$ (i per tant $x(t)$ decreix).

t2 Sigui $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del PVI $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$, $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $t_1 > 0$ és el primer instant en què $x(t_1) = 0$, quin és el valor de $y(t_1)$?

- (a) $-e^{\pi/2}$
- (b) $2e^{\pi/4}$
- * (c) $-\frac{1}{2}e^{\pi/4}$
- (d) $\frac{1}{3}e^{\pi/2}$
- (e) cap de les anteriors

.....

Solució: La matriu té valors propis complexos $1 \pm 2i$, i el valor propi $1 + 2i$ té el vector propi $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Així tenim un conjunt fonamental de solucions

$$\vec{X}^{(1)}(t) = e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \quad \vec{X}^{(2)}(t) = e^t \left[\sin 2t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Veiem que la solució del PVI és $\vec{X}(t) = \frac{1}{2} \vec{X}^{(1)}(t)$. La primera component s'anul·la per primer cop quan $t_1 = \pi/4$, i llavors la segona component és $y(t_1) = \frac{1}{2} e^{\pi/4} (-\sin(\pi/2)) = -\frac{1}{2} e^{\pi/4}$.

Es pot veure més ràpid observant que el sistema és un focus repulsor que gira en sentit horari i per tant el tall amb l'eix Y tindrà lloc al semieix negatiu. A més, com que els valors propis tenen part imaginària $\beta = 2$ l'òrbita trigarà un temps $2\pi/\beta = \pi$ a fer una volta sencera i $\pi/4$ a fer un quart de volta.

t3 Donat el sistema no lineal $x' = y - xy^2$, $y' = -x^3$, determineu si l'origen és estable o inestable, com a punt d'equilibri del sistema linealitzat i del sistema no lineal.

[Ind.: Podeu considerar una funció de Lyapunov de la forma $V(x, y) = ax^4 + by^2$.]

- (a) estable per al sistema linealitzat, i inestable per al sistema no lineal
- (b) inestable per als dos sistemes
- (c) estable per als dos sistemes
- * (d) inestable per al sistema linealitzat, i estable per al sistema no lineal
- (e) cap de les anteriors

.....

Solució: La matriu del sistema linealitzat és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, i és inestable ja que té el 0 com a valor propi doble i no diagonalitza. Però el mètode de linealització no decideix l'estabilitat del $(0, 0)$ en el sistema no lineal. Podem usar $V(x, y) = ax^4 + by^2$ com a funció de Lyapunov si $a, b > 0$, i la seva derivada temporal és

$$W(x, y) = 4ax^3(y - xy^2) + 2by(-x^3) = (4a - 2b)x^3y - 4ax^4y^2.$$

Escollint $a = 1$ i $b = 2$, obtenim $W(x, y) = -4x^4y^2$ que és semi-definida negativa, i per tant l'origen és estable per al sistema no lineal.

t4 Considereu el sistema no lineal

$$x' = 3\lambda x - \mu x(x^2 + y^2), \quad y' = \lambda y - 2\mu y(x^2 + y^2).$$

Per a quins valors dels paràmetres λ i μ l'origen és un punt d'equilibri repulsor? [Ind.: quan sigui necessari, podeu considerar $V(x, y) = x^2 + y^2$ com a funció de Lyapunov.]

- (a) o bé $\lambda > 0$, o bé $\lambda = 0$ i $\mu > 0$ (b) $\lambda \leq 0$
(c) $\lambda \geq 0$ *(d) o bé $\lambda > 0$, o bé $\lambda = 0$ i $\mu < 0$
(e) cap de les anteriors

Solució: El sistema linealitzat a l'origen és $x' = 3\lambda x$, $y' = \lambda y$, que clarament té 3λ i λ com a valors propis. Llavors, per al sistema no lineal, l'origen és atractor si $\lambda < 0$ i repulsor si $\lambda > 0$. El sistema linealitzat no decideix quan $\lambda = 0$. En aquest cas, amb la funció de Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$ obtenim la derivada temporal

$$W(x, y) = 2x(0 - \mu x(x^2 + y^2)) + 2y(0 - 2\mu y(x^2 + y^2)) = -2\mu(x^2 + 2y^2)(x^2 + y^2),$$

i deduïm que l'origen és atractor si $\mu > 0$, estable no atractor si $\mu = 0$, i repulsor si $\mu < 0$.

t5 Considereu l'EDP $u_{tt} + bu_t - c^2 u_{xx} = 0$, que correspon al moviment d'una corda vibrant on hem suposat un esmorteïment proporcional a la velocitat (amb una constant de proporcionalitat $b > 0$). Suposem que busquem solucions per separació de variables, de la forma $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Si la funció $X(x)$ és solució d'una EDO $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, digueu de quina EDO ha de ser solució la funció $T(t)$.

- (a) $T''(t) + bT'(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$ (b) $T''(t) + b\lambda T'(t) - c^2 T(t) = 0$
*(c) $T''(t) + bT'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0$ (d) $T''(t) + b\lambda T'(t) + c^2 T(t) = 0$
(e) cap de les anteriors

Solució: Substituint a l'EDO, tenim $X(x) \cdot T''(t) + bX(x) \cdot T'(t) - c^2 X''(x) \cdot T(t) = 0$, i per tant

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) + bT'(t)}{c^2 T(t)} = \lambda.$$

t6 Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, associat a l'equació de la calor amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 4x + \cos 2x, & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 4, & t > 0. \end{cases}$$

Trobeu el valor de $u(\frac{\pi}{2}, 1)$. [Ind.: Trobeu una solució estacionària $u_0(x)$ de l'EDP que també satisfaci les condicions de contorn, i fent el canvi $u(x, t) = u_0(x) + v(x, t)$ plantegeu el nou problema per a $v(x, t)$.]

- (a) $\pi - e^{-2}$ *(b) $2\pi - e^{-4}$ (c) $\pi + e^{-4}$ (d) $2\pi + e^{-2}$ (e) cap de les anteriors

Solució: La funció $u_0(x) = 4x$ és solució estacionària de l'EDP, que satisfà també les condicions de contorn: $u'_0(0) = u'_0(\pi) = 4$. Llavors $v = u - u_0$ ha de ser solució del problema

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ v(x, 0) = \cos 2x, & x \in (0, \pi), \\ v_x(0, t) = v_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Suprimint inicialment la condició inicial, tenim un problema homogeni i en busquem solucions per separació de variables, $v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. D'aquesta manera, obtenim 2 EDOs amb algunes condicions addicionals:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, & \end{cases} \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

En el primer cas tenim un PVF que té com a valors propis $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 0$, i funcions pròpies $X_n(x) = \cos nx$. Substituint λ_n a la segona EDO, resulta $T_n(t) = e^{-n^2 t}$. Els modes normals són $v_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $n \geq 0$, i caldria buscar la solució com a combinació lineal infinita d'aquests modes normals. Però veiem que el mode normal $v_2(x, t)$ ja satisfà la condició inicial. Tornant al problema original, la solució és $u(x, t) = u_0(x) + v_2(x, t) = 4x + e^{-4t} \cos 2x$, i per tant $u(\frac{\pi}{2}, 1) = 2\pi - e^{-4}$.