

Nom i cognoms:

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(A)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 19 Gen 2022

Temps: 2 h 30 min

Puntuacions (nota màxima: 15 punts)

- * **Problemes:** $p1 \rightarrow 2.5$ punts, $p2 \rightarrow 3$ punts.
- * **Qüestions** ($q1, q2, q3$): 1.5 punts cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).
- * **Test** ($t1 - t5$): respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

p1

Considerem el sistema autònom

$$x' = f(x, y) = -8x^2y + 16y^3, \quad y' = g(x, y) = -4x - 4x^3 + 8xy^2,$$

donat pel camp vectorial $\vec{F} = (f, g)$, i que té l'origen com a punt d'equilibri.

- (a) Definim un altre camp vectorial $\vec{G} = (P, Q) = (-g, f)$. Aquest camp $\vec{G}$ és conservatiu, és a dir, prové d'un potencial escalar: una funció $V(x, y)$ tal que $\frac{\partial V}{\partial x} = P$, $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$. Trobeu aquesta funció $V(x, y)$ escollint-la de manera que $V(0, 0) = 0$.
- (b) Estudieu si $V(x, y)$ és una quantitat conservada del sistema original, donat pel camp vectorial $\vec{F}$.
- (c) Proveu que $V(x, y)$ és definida positiva i, usant-la com a funció de Lyapunov, determineu l'estabilitat de l'origen (tenint en compte l'apartat (b)).

Solució:

- (a) Notem que $\vec{G}$ satisfà la condició necessària: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y} = -16xy = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Integrem $V = \int P dx = 2x^2 + x^4 - 4x^2y^2 + h(y)$, derivem respecte l'altra variable $\frac{\partial V}{\partial y} = -8x^2y + h'(y) = Q$, obtenim $h'(y) = 16y^3$ i per tant $h(y) = 4y^4 + \text{const.}$ Així, tenim un potencial escalar $V(x, y) = 2x^2 + x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$, que s'anul·la a l'origen.
- (b) A partir de V , calculem

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot g = P \cdot f + Q \cdot g \equiv 0.$$

Per tant, $V(x, y)$ és una quantitat conservada.

- (c) Podem veure que la funció $V(x, y)$ és definida positiva a l'origen escrivint-la en la forma $V(x, y) = 2x^2 + (x^2 - 2y^2)^2$ (ja que x^2 i $(x^2 - 2y^2)^2$ només s'anul·len simultàniament a l'origen), o bé en la forma $V(x, y) = x^2(2 + x^2 - 4y^2) + 4y^4$ (tenint en compte que $2 + x^2 - 4y^2 > 0$ prop de l'origen). Llavors, pel resultat de l'apartat (b), l'origen és estable no atractor.

q1

Donat el PVI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

trobeu la primera component $x(t)$ de la solució, sabent que la part homogènia té $\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & 3e^{2t} \end{pmatrix}$ com una matriu fonamental.

Resposta: $2e^t - 2e^{2t}$

Justificació:

La matriu té vectors propis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, de valors propis -1 i 2 respectivament. Per tant tenim $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & 3e^{2t} \end{pmatrix}$ com una matriu fonamental. Aplicant el mètode de variació de constants, plantegem el sistema

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

que ens dóna $u_1'(t) = 4e^{2t}$, $u_2'(t) = 0$. Integrem i obtenim una solució particular: $\vec{X}_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

La solució general és

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_p(t) + \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Imposant les condicions inicials, obtenim $c_1 = 0$ i $c_2 = 2$. Finalment, la primera component de la solució obtinguda és $x(t) = 2e^t - 2e^{2t}$. [Nota: També és factible resoldre dues EDOs consecutivament: primer $y' = 2y$, $y(0) = 6$, substituir la $y(t)$ obtinguda a $x' = -x - y + 4e^t$, $x(0) = 0$, i resoldre aquesta.]

q2

Trobeu els valors del paràmetre μ per als quals la solució del PVI $x'' - \mu x' - 3x = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$, compleix que $(x(t), x'(t))$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.

Resposta: $\mu = -2$

Justificació:

Prenent $y = x'$ com a segona funció incògnita, convertim l'EDO en un sistema lineal homogeni, de matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \mu \end{pmatrix}$. Observem que $\det A < 0$ per a qualsevol μ , per tant el sistema sempre és una sella. Perquè $(x(t), x'(t))$ tendeixi a l'origen, el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ha de ser vector propi de A , amb el valor propi negatiu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 + 3\mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $\lambda = -3 < 0$ i $3\lambda = -3 + 3\mu$, d'on deduïm que $\mu = -2$ és l'únic valor del paràmetre per al qual $(x(t), x'(t))$ tendeix a $(0, 0)$.

q3

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació de la calor no homogènia amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \frac{1}{1+t}, & x \in (0, 3), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 5 - \cos(15\pi x), & x \in (0, 3), \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(3, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Calculeu la funció temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{3} \int_0^3 u(x, t) dx$. [Ind.: no cal trobar la solució $u(x, t)$, n'hi ha prou treballant amb $T'(t)$ i $T(t)$.]

Resposta: $T(t) = 5 + \ln(1 + t)$

Justificació:

Derivem $T(t)$ i, usant l'EDP i les condicions de contorn, obtenim:

$$T'(t) = \frac{1}{3} \int_0^3 u_t(x, t) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 \left[4u_{xx}(x, t) + \frac{1}{1+t} \right] dx = \frac{1}{3} \left([4u_x(x, t)]_{x=0}^{x=3} + \frac{3}{1+t} \right) = \frac{1}{1+t}.$$

Integrant, resulta $T(t) = \ln(1 + t) + c$. Per determinar la constant, usem la condició inicial:

$$c = T(0) = \frac{1}{3} \int_0^3 u(x, 0) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 [5 - \cos(15\pi x)] dx = 5,$$

i obtenim $T(t) = 5 + \ln(1 + t)$.

t1 Sigui $x(t)$ la solució del PVI $x' = -1 + \cos x$, $x(0) = 1$. Quin és el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$?

- (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2\pi$ (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -2\pi$ (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ *(d) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
 (e) cap de les anteriors

Solució: Es tracta d'una EDO autònoma en dimensió 1. Els seus punts d'equilibri són $x_n = 2n\pi$, per n enter. Entre dos equilibris consecutius x' és negativa. Per tant $x(t)$ decreix i quan $t \rightarrow \infty$ tendeix al següent punt d'equilibri, que és $x_0 = 0$.

t2 Si $(x(t), y(t))$ és la solució del PVI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

trobeu el valor de $x(\pi) + y(\pi)$.

- (a) 0 *(b) $-e^{-\pi}$ (c) 1 (d) $e^{2\pi}$ (e) cap de les anteriors

Solució: La matriu té valors propis complexos $\lambda_{\pm} = -1 \pm i$, i per exemple el valor propi $\lambda_+ = -1 + i$ té el vector propi $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{w}^{(1)} + i \vec{w}^{(2)}$. Llavors tenim com a conjunt fonamental de solucions

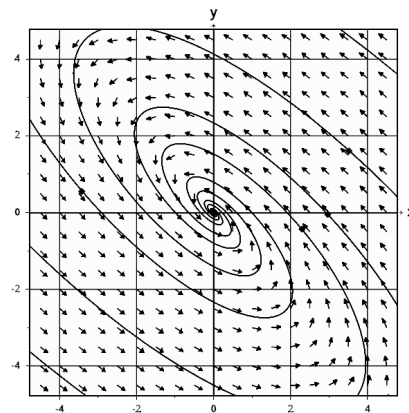
$$\begin{aligned} \vec{Y}^{(1)}(t) &= e^{-t} [\cos t \cdot \vec{w}^{(1)} - \sin t \cdot \vec{w}^{(2)}] = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \vec{Y}^{(2)}(t) &= e^{-t} [\sin t \cdot \vec{w}^{(1)} + \cos t \cdot \vec{w}^{(2)}] = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podem escriure la solució general com una combinació lineal de $\vec{Y}^{(1)}(t)$ i $\vec{Y}^{(2)}(t)$ i determinar els coeficients a partir de les condicions inicials (surten $c_1 = 1$, $c_2 = 0$), o bé observar que $\vec{Y}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ és directament la solució buscada ja que compleix les condicions inicials.

Així tenim $x(t) + y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)$, i per tant $x(\pi) + y(\pi) = -e^{-\pi}$.

t3 Només un dels sistemes lineals homogenis $\vec{X}' = A \vec{X}$ amb les matrius A indicades té el retrat de fase de la figura. Quin és?

[Ind.: Us pot ajudar avaluar el camp vectorial en un punt adequat, per exemple $(1, 0)$.]



- (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
 (e) cap de les anteriors

Solució: Per la figura, veiem clarament que tenim un focus atractor, que gira en sentit antihorari. Per tenir un focus atractor, cal que la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tingui determinant $D > 0$, traça $T < 0$, i discriminant $\Delta = T^2 - 4D < 0$.

I, a més, tenint en compte que el vector del camp vectorial al punt $(1, 0)$ és $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, caldrà tenir $c > 0$ perquè giri en sentit

antihorari. Només dues de les matrius proposades, $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, compleixen aquestes condicions. Per diferenciar-les, observem per la figura que el vector $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ha d'apuntar cap a l'esquerra, $a < 0$, i això només es compleix amb la matriu $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. [Nota: Es pot fer un raonament similar amb el punt $(0, 1)$; llavors cal demanar $b < 0$ i $d > 0$.]

t4 El sistema no lineal

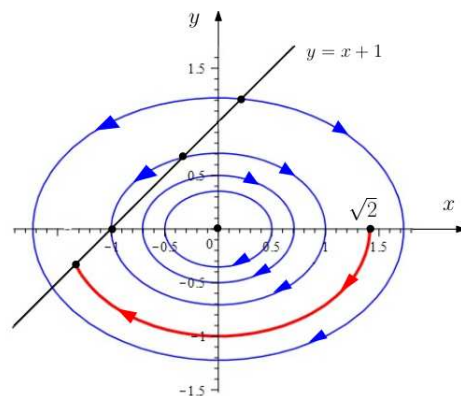
$$x' = -2y(y - x - 1), \quad y' = x(y - x - 1),$$

té una quantitat conservada $V(x, y) = x^2 + 2y^2$. Sigui $(x(t), y(t))$ la solució que compleix la condició inicial $(x(0), y(0)) = (\sqrt{2}, 0)$. Trobeu, si existeix, el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$. [Ind.: Trobeu tots els punts d'equilibri del sistema. Noteu que les corbes de nivell de $V(x, y)$ són el·lipses. Determineu el sentit de gir de la solució $(x(t), y(t))$.]

- (a) ∞ (b) no existeix (c) 0 *(d) $-4/3$ (e) cap de les anteriors

Solució:

Els punts d'equilibri són el $(0, 0)$ i tots els de la recta $L = \{y = x + 1\}$. Com que el punt $(\sqrt{2}, 0)$ pertany a l'el·lipse $E = \{x^2 + 2y^2 = 2\}$, tota la solució $(x(t), y(t))$ estarà continguda en E . Aquesta solució gira en sentit horari sobre E , ja que $(x'(0), y'(0)) = \vec{F}(\sqrt{2}, 0) = (0, -(2 + \sqrt{2}))$. Però no pot donar la volta completa, perquè dos dels punts d'equilibri de la recta L es troben sobre E : resolent el sistema $x^2 + 2y^2 = 2$, $y = x + 1$ arribem a l'equació $3x^2 + 4x = 0$, que té les arrels $x = 0$ i $x = -4/3$, i per tant els punts d'equilibri $(0, 1)$ i $(-4/3, -1/3)$ pertanyen a E . Tenint en compte el sentit de gir, deduíem que el límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow \infty$ és $-4/3$.



t5 Calculeu $u(x, \pi/3)$ per a la solució del problema següent, corresponent a l'equació d'ones en una corda infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 4, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) $\frac{2\pi}{3} + \cos x$ (b) $\frac{2\pi}{3} - \sin x$ *(c) $\frac{4\pi}{3} - \cos x$ (d) $\frac{4\pi}{3} + \sin x$ (e) cap de les anteriors

Solució: Per la fórmula de D'Alembert,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos(x + 3t) + \cos(x - 3t)) + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} 4 \, du = 4t + \cos x \cdot \cos 3t,$$

i obtenim $u(x, \pi/3) = \frac{4\pi}{3} - \cos x$.

Considerem el problema següent, corresponent a l'equació d'ones no homogènia amb condicions de contorn de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin 3x, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{36} \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aquest problema es resol per separació de variables, però primer s'ha d'homogeneïtzar l'EDP.

- Busqueu una solució particular senzilla $v(x)$ (que no depengui de t , per exemple de la forma $v(x) = A \sin \alpha x$) i, fent el canvi de funció $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$, plantegeu el problema (EDP + condicions inicials i de contorn) per a la nova funció incògnita $w(x, t)$.
- Aplicant separació de variables, resolcu el problema per a $w(x, t)$ i trobeu la solució $u(x, t)$ del problema original.

Solució:

- Com a solució particular, podem triar $v(x) = \frac{1}{36} \sin 3x$, la qual també compleix les condicions de contorn i una de les condicions inicials. Aleshores la nova funció incògnita $w = u - v$ haurà de complir

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ w_t(x, 0) = \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ w(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ w(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Inicialment deixem de banda la condició inicial no homogènia, i busquem solucions per separació de variables $w(x, t) = X(x)T(t)$. Obtenim dos problemes d'EDOs

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t) - 4\lambda T(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ T(0) = 0. \end{cases}$$

El primer és un PVF que té els valors propis $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$, amb les funcions pròpies $X_n(x) = \sin nx$. Amb aquestes λ_n , l'EDO del segon problema esdevé $T''(t) + 4n^2T(t) = 0$, i obtenim $T_n(t) = \sin(2nt)$. Els modes normals són $w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$.

Ara fem combinacions lineals $w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_n(x, t)$ i imposem la condició inicial no homogènia,

$$w_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (w_n)_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n(x) T'_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nd_n \sin nx = \sin 3x.$$

Veiem que $d_3 = 1/6$, i tots els altres d_n seran zero. Per tant, $w(x, t) = \frac{1}{6} w_3(x, t)$. Finalment, sumant la solució particular $v(x)$ obtenim la solució:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = \sin 3x \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{6} \sin 6t \right).$$