

Nom i cognoms:

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(A₁)

Equacions Diferencials (240131)

Examen Final – 25 Juny 2021

Temps: 2 h 30 min

Puntuacions (nota màxima: **17 punts**)

- * **Test** ($t1 - t5$): respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts (la suma total del test no serà negativa). Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.
- * **Qüestions** ($q1, q2, q3$): 1 punt cadascuna; les respostes errònies no resten. Heu d'escriure la resposta al requadre i una BREU justificació (tota resposta sense justificar és un 0).
- * **Problemes** ($p1, p2, p3$): 3 punts cadascun

p1

Considereu el sistema d'EDOs següent: $x' = -y + xy$, $y' = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

- Trobeu-ne tots els punts d'equilibri.
- Per a cada punt d'equilibri, determineu-ne l'estabilitat, si és possible, usant el mètode de linealització.
- Determineu l'estabilitat dels altres punts d'equilibri, considerant una funció de Lyapunov de la forma $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + ax^3 + by^2$, amb a i b adequats.

Solució:

- Per trobar els punts d'equilibri, resollem el sistema

$$-y + xy = 0, \quad x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = 0.$$

La primera equació ens diu que $y = 0$ o $x = 1$. En el primer cas, de la segona equació deduïm $x + \frac{1}{2}x^2 = 0$, i per tant $x = 0$ o $x = -2$. I en el segon cas, la segona equació ens diu que $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y^2 = 0$, i per tant $y = \pm\sqrt{3}$. Així, tenim 4 punts d'equilibri: $(0, 0)$, $(-2, 0)$ i $(1, \pm\sqrt{3})$.

- Si $\vec{F}$ és el camp vectorial que defineix el sistema d'EDOs, la seva matriu jacobiana és $D\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ x+1 & -y \end{pmatrix}$, que té determinant $D(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, que és positiu al punt $(0, 0)$, i negatiu als altres 3 punts d'equilibri.
 - * Al punt $(0, 0)$, la matriu jacobiana ens indica que el sistema linealitzat és un centre, i per tant no decideix.
 - * Als punts $(-2, 0)$ i $(1, \pm\sqrt{3})$, el sistema linealitzat és una sella, i per tant són punts inestables no repulsors en el sistema no lineal donat.
- Apliquem el mètode de Lyapunov al punt $(0, 0)$ amb la funció $V(x, y)$ suggerida, que és definida positiva en aquest punt ja que hi té un mínim relatiu estricte. Calculem la seva derivada temporal:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y' = (x + 3ax^2 + by^2)(-y + xy) + (y + 2bxy)(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2) \\ &= (\frac{3}{2} - 3a + 2b)x^2y + (3a + b)x^3y - (b + \frac{1}{2})y^3, \end{aligned}$$

i tenim $W \equiv 0$ si escollim $a = 1/6$ i $b = -1/2$. Així doncs, el $(0, 0)$ és estable no atractor (un centre no lineal).

(a) $(1, 0, \frac{1}{2})$ i $\sin t$
 (c) $(1, \frac{1}{2}, 0)$ i $\sin t$
 (e) cap de les anteriors

* (b) $(1, 0, \frac{1}{2})$ i $\frac{1}{2} \sin t$
 (d) $(1, \frac{1}{2}, 0)$ i $\frac{1}{2} \sin t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix},$$

i per tant la resposta correcta és: $(1, 0, \frac{1}{2})$ i $\frac{1}{2} \sin t$.

(a) 0 (b) 1 ^{*}(c) 2 (d) -1 (e) cap de les anteriors

(a) $7R/6$ (b) R (c) $3R/2$ ^{*}(d) $4R/3$ (e) cap de les anteriors

$$f(Q) = R\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - \sin \varphi)^2} = R\sqrt{2 - 2\sin \varphi}.$$
$$\int_S f \, dS = R^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \sin \varphi} \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi R^3 \cdot \left[-\frac{1}{3} (2 - 2 \sin \varphi)^{3/2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{3} \pi R^3.$$

Sabent que $\text{Area}(S) = 4\pi R^2$, resulta que la distància mitjana és $\bar{f} = \frac{4R}{3}$.

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4e^{2(t-1)} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 2e^{-2} & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \cos x & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h(x, t) & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quins són els valors de $h(0, 0)$, $f(0)$ i $g(0)$?

- (a) $h(0, 0) = 0$, $f(0) = -e^{-2}$, $g(0) = 2e^{-2} - 1$
- * (b) $h(0, 0) = 0$, $f(0) = e^{-2}$, $g(0) = 1 - 2e^{-2}$
- (c) $h(0, 0) = -e^{-2}$, $f(0) = e^{-2}$, $g(0) = 2e^{-2} - 1$
- (d) $h(0, 0) = e^{-2}$, $f(0) = 0$, $g(0) = e^2$
- (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Calculem directament:

$$h(x, t) = (u_{tt} - u_{xx}) - (4e^{2(t-1)} - 0) = 0, \quad f(x) = u(x, 0) - e^{-2} = e^{-2}, \quad g(x) = u_t(x, 0) - 2e^{-2} = \cos x - 2e^{-2},$$

i avaluem en $x = t = 0$.

t5 Donat el següent problema de valors inicials per a l'equació d'ones a tota la recta,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

calculeu el valor de $u(1, 1)$.

- (a) $1/10$ (b) $-1/10$ *(c) $1/5$ (d) $2/5$ (e) cap de les anteriors

.....
Solució: Usem la fórmula de D'Alembert, amb $c = 1$. Per a $x = 1$ i $t = 1$, s'obté $x - ct = 0$ i $x + ct = 2$. Per tant,

$$u(1, 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{-2y}{(1+y^2)^2} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+y^2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

q1 Sigui $x(t)$ la solució del problema de valors inicials següent: $x'' = \alpha x - 2x'$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -3$. Trobeu tots els valors de α per als quals $x(t)$ tendeix a 0 quan $t \rightarrow \infty$.

Resposta: $\alpha < 0$

Justificació:

Escollint $y = x'$ com a funció incògnita, tenim el sistema lineal de matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$, amb la condició inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Notem que si la solució $x(t)$ tendeix a 0 quan $t \rightarrow \infty$, llavors $y(t) = x'(t)$ també tendeix a 0 (ja que hem de derivar expressions on intervenen exponencials amb exponents negatius), i per tant la solució $(x(t), y(t))$ del sistema tendirà a l'origen. Així, ens trobarem en un dels casos següents:

- (a) si el sistema és atractor, independentment de les condicions inicials;
- (b) si el sistema és una sella o bé degenerat amb un valor propi negatiu, i llavors cal que el punt $(2, -3)$ es trobi sobre la direcció atractora.

Calculem el determinant i la traça: $D = -\alpha$, $T = -2$. Aleshores:

- * Quan $\alpha < 0$, ens trobem en el cas (a).
- * Quan $\alpha \geq 0$, ens trobarem en el cas (b) si, a més, la matriu A té $(2, -3)$ com a vector propi de valor propi negatiu. Per verificar-ho, calculem

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2\alpha + 6 \end{pmatrix},$$

i perquè els dos vectors siguin proporcionals cal que $\alpha = -3/4$, però no pot ser ja que estàvem suposant $\alpha \geq 0$.

q2 Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (3xz^2, z^5, -z^3)$ a través de la superfície $S = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z} = 1, \quad 1 \leq z \leq 2 \right\}$ orientada pel camp normal $\vec{N}(2, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. [Ind.: Podeu “tancar” la superfície amb les el·lipses obtingudes per a $z = 1$ i $z = 2$.]

Resposta: $(16\sqrt{2} - 1)\pi$

Justificació:

Donat que l'orientació és l'exterior i tenim $\text{div } \vec{F} \equiv 0$, apliquem el teorema de la divergència al domini tancat per S i les superfícies $S_1 = \{(x, y, z) : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ i $S_2 = \{(x, y, z) : z = 2, x^2/4 + y^2/2 \leq 1\}$, orientades per $-\vec{k} = (0, 0, -1)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$ respectivament. Resulta que el flux demanat és

$$I = - \int_{S_1} \langle \vec{F}, -\vec{k} \rangle dS - \int_{S_2} \langle \vec{F}, \vec{k} \rangle dS = -\text{Area}(S_1) + 8 \text{Area}(S_2) = (16\sqrt{2} - 1)\pi.$$

q3 Considerem el següent problema per a l'equació de la calor,
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

on la funció $f(x)$ ve expressada com una sèrie de sinus $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, on suposem coneguts els coeficients b_n . Si expressem

la solució del problema com una sèrie $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$, trobeu les funcions $G_n(t)$.

Resposta: $G_n(t) = b_n e^{-n^2 t}$

Justificació:

Suprimint inicialment la condició inicial (no homogènia) i aplicant separació de variables, obtenim els modes normals $u_n(x, t) = e^{-n^2 t} \cdot \sin nx$, $n \geq 1$. Considerant combinacions lineals i imposant la condició inicial $u(x, 0) = f(x)$, resulta que els coeficients han de ser els mateixos que els de la sèrie de sinus donada: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$. Així, tenim $G_n(t) = b_n e^{-n^2 t}$.

Una altra opció és imposar directament que la solució proposada $\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$ satisfà l'EDP i la condició inicial (observant que en qualsevol cas compleix les condicions de contorn). D'aquesta manera les funcions $G_n(t)$ han de complir:

$$\begin{cases} G'_n(t) + n^2 G_n(t) = 0, & t > 0, \\ G_n(0) = b_n, \end{cases}$$

i resolent aquesta EDO amb condició inicial arribem al mateix resultat.

p2 Donat el camp $\vec{F} = (1, x + z, y)$, calculeu el flux del seu rotacional, $\text{rot } \vec{F}$, a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z \leq 1\}$, orientada per la normal exterior.

Solució:

Ho veurem de dues maneres diferents:

(1) Aplicant el teorema de Stokes,

$$I = \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oint_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle,$$

essent C la corba intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el pla $x + z = 1$, amb una orientació compatible amb la de S . Per trobar una parametrització de C , eliminem z de les dues equacions, i obtenim l'equació de la seva projecció $\tilde{C}$ sobre el pla (x, y) :

$$x^2 + y^2 + (1 - x)^2 = 1, \quad \text{és a dir} \quad 4(x - 1/2)^2 + 2y^2 = 1,$$

una el·lipse de centre $(1/2, 0)$ i semieixos $1/2$ i $1/\sqrt{2}$. Llavors, una parametrizació de C és

$$\sigma(t) = \left(\frac{1 + \cos t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, 1 - x(t) \right) = \left(\frac{1 + \cos t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{1 - \cos t}{2} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aquesta parametrizació $\sigma(t)$ dóna l'orientació la projecció $\tilde{C}$ en sentit antihorari, però l'orientació correcta de C és en sentit horari. Per tant,

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = - \int_0^{2\pi} \left\langle \left(1, 1, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{2} \right) \right\rangle dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{2}} \right) dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- (2) Calculant $\vec{F} = (0, 0, 1) = \vec{k}$, que és un camp solenoidal, i apliquem el teorema de Gauss al sòlid comprès entre S i la “tapa” $T = \{(x, y, z) : x + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Posant $z = 1 - x$ veiem, com abans, que T és el tros del pla $x + z = 1$ que es projecta sobre l'el·lipse plena $D = \{(x, y) : 4(x - 1/2)^2 + 2y^2 \leq 1\}$, de semieixos $1/2$ i $1/\sqrt{2}$. Orientant T per la normal exterior al sòlid, és a dir $\vec{N}_T = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$, obtenim

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= - \int_{T^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_T \langle \vec{k}, \vec{N}_T \rangle dS = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Area}(T) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_D \sqrt{2} dx dy = -\text{Area}(D) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

p3

Resoleu el següent problema de contorn per a l'equació de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = 2 \sin(\pi x) - 3 \sin(2\pi x), & x \in (0, 1), \\ u(0, y) = 0, & y \in (0, 1), \\ u(1, y) = 0, & y \in (0, 1). \end{cases}$$

Solució:

Buscant solucions de variables separades, $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, del problema homogeni obtingut en suprimir la condició no homogènia $u(x, 1) = \dots$,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(0, y) = 0, & y \in (0, 1), \\ u(1, y) = 0, & y \in (0, 1), \end{cases}$$

obtenim els problemes

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

El primer és un PVF, que té els valors propis $\lambda_n = -(n\pi)^2$, $n \geq 1$, i les funcions pròpies $X_n(x) = \sin(n\pi x)$. Substituint les λ_n al segon problema, obtenim $Y_n(y) = \sinh(n\pi y)$. Així, tenim els modes normals $u_n(x, y) = \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$. Fem combinacions lineals d'aquestes i ajustem els coeficients d_n per tal que es compleixi la condició no homogènia:

$$u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(n\pi) \sin(n\pi x) = 2 \sin(\pi x) - 3 \sin(2\pi x),$$

i cal buscar $b_n = d_n \sinh(n\pi)$ com a coeficients d'una sèrie de sinus. A ull, trobem: $b_1 = 2$, $b_2 = -3$, i tots els altres b_n són zero. A partir d'aquests trobem d_1 i d_2 i, per tant, la solució és

$$u(x, y) = \frac{2}{\sinh \pi} \sin(\pi x) \sinh(\pi y) - \frac{3}{\sinh(2\pi)} \sin(2\pi x) \sinh(2\pi y).$$