

Nom i cognoms:	Columna (A,B,C...)	Fila (1,2,3...)
----------------	-----------------------	--------------------

(F_1)

Puntuació: respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.25 punts. Cal deixar ben clar quina resposta s’ha marcat, o si no se n’ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

- 1** Considereu el sistema $X' = AX$, amb $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha - 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, essent $\alpha \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Determineu el conjunt de tots els valors de α per als quals el sistema és un focus atractor.
- *(a) $-2 - \sqrt{6} < \alpha < -1$
(b) $\alpha = -1$
(c) $-2 + \sqrt{6} < \alpha < 3/2$
(d) $\alpha = -2 \pm \sqrt{6}$
- (e) cap de les anteriors

Solució: Calculem la traça, el determinant i el discriminant: $T = 2\alpha + 2$, $D = -2\alpha + 3$, $\Delta = T^2 - 4D = 4\alpha^2 + 16\alpha - 8$. Notem que $\Delta = 0$ per a $\alpha = -2 \pm \sqrt{6}$, essent negatiu a l’interval entre aquests valors i positiu a fora. Aleshores, deduïm que és focus atractor si $D > 0$, $T < 0$ i $\Delta < 0$, és a dir $-2 - \sqrt{6} < \alpha < -1$.

- 2** Considerem el sistema $x' = -2y + 2y^2 - 3x^3 + 2x^3y$, $y' = x - xy - 2y^3 + 3y^4$. Usant una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, què podem concloure sobre l’estabilitat de l’origen?
- (a) que segur que és estable no atractor
(b) que és estable, però no sabem si atractor
- *(c) que segur que és atractor
(d) que segur que és repulsor
- (e) cap de les anteriors

Solució: Prenent la funció $V(x, y) = (x^2 + 2y^2)/2$, resulta la derivada temporal $W(x, y) = x^4(-3 + 2y) + 2y^4(-2 + 3y)$. Notem que $-3 + 2y$ i $-2 + 3y$ tenen, prop de l’origen, signe negatiu. Per tant, el resultat serà el mateix que obtindríem canviant W per $\widetilde{W}(x, y) = -3x^4 - 4y^4$, que és definida negativa (atractor).

- 3** Calculeu la mitjana de la distància a l’origen, per a la porció de cardioide definida en coordenades polars per $r = 5(1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, suposant en cada punt una densitat de massa $\rho = 2 \sin(\theta/2)$.
- (a) 2
*(b) 5
(c) 5/2
(d) 0
(e) cap de les anteriors

Solució: Definint $g(\theta) = 5(1 + \cos \theta)$, l’element de longitud és

$$d\ell = \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} \, d\theta = 5\sqrt{2 + 2\cos \theta} \, d\theta = 10 |\cos(\theta/2)| \, d\theta = 10 \cos(\theta/2) \, d\theta$$

(on hem usat que $\cos(\theta/2) \geq 0$ ja que $0 \leq \theta/2 \leq \pi/2$). La distància a l’origen és $r = 10 \cos^2(\theta/2)$, i la seva mitjana $\bar{r}$ és el quocient de les integrals

$$\int_C r \rho \, d\ell = 200 \int_0^\pi \cos^2(\theta/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2) \, d\theta = 100,$$

$$\int_C \rho \, d\ell = 20 \int_0^\pi \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2) \, d\theta = 20,$$

i obtenim $\bar{r} = 5$.

- 4** Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F} = (2x^2 - y^2, 3z^3 + 5, \sin(x + y))$ a través de la porció $y \geq \sqrt{3}$ de l'el·lipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, orientada per la normal exterior a l'el·lipsoide.

(a) $-112\pi/9$ (b) -9π * (c) $40\pi/3$ (d) 28π (e) cap de les anteriors

Solució: Per aplicar el teorema de Gauss, afegim a la superfície S una tapa T , de manera que $S \cup T = \partial W$, essent

$$T = \left\{ y = \sqrt{3}, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\} = \left\{ y = \sqrt{3}, x^2 + z^2 \leq \frac{8}{3} \right\}, \quad W = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1, y \geq \sqrt{3} \right\}.$$

Observant que $\operatorname{div} F = 4x$, que és una funció senar en x i usant la simetria de W respecte el pla $x = 0$, obtenim:

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W 4x \, dx \, dy \, dz = 0,$$

on cal orientar T per la normal exterior a W , és a dir pel vector $\vec{N}_T = (0, -1, 0)$. Per tant,

$$\int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_{T^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_T \langle \vec{F}, \vec{N}_T \rangle \, dS = \int_T (3z^3 + 5) \, dS = 5 \operatorname{Area}(T) = \frac{40\pi}{3},$$

on ara hem usat la simetria de T respecte $z = 0$.

- 5** Considereu la superfície S definida per $z = x^2 - 7y^2$, amb $(x, y) \in [-1, 1]^2$ orientada pel vector normal $(0, 0, 1)$ a l'origen. Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (e^{x^2}, z^2, xy)$ al llarg de la vora ∂S , si té l'orientació compatible amb la de S .

*(a) $-64/3$ (b) $64/3$ (c) $-56/3$ (d) $56/3$ (e) cap de les anteriors

Solució: Aplicant el teorema de Stokes, calcularem el flux de $\operatorname{rot} \vec{F} = (x - 2z, -y, 0)$ a través de S . Parametritzem S com una gràfica, $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 - 7y^2)$, amb domini $D = [-1, 1]^2$. El vector normal és $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-2x, 14y, 1)$, que té l'orientació demanada. Sobre S , tenim $(\operatorname{rot} \vec{F})(\Phi(x, y)) = (x - 2(x^2 - 7y^2), -y, 0)$. Calculem:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D \langle (\operatorname{rot} \vec{F})(\Phi(x, y)), \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle \, dx \, dy \\ &= \int_D (-2x^2 + 4x^3 - 28xy^2 - 14y^2) \, dx \, dy = - \int_{-1}^1 2x^2 \, dx \cdot 2 - 2 \cdot \int_{-1}^1 14y^2 \, dy = -\frac{64}{3}. \end{aligned}$$

- 6** Considerem l'equació de la calor 1D per a una barnilla, $u_t - u_{xx} = 0$, $x \in (0, 2)$, $t > 0$, amb temperatura inicial $u(x, 0) = 0$ i condicions de contorn $u_x(0, t) = -4t$, $u_x(2, t) = 3t^2$. Calculeu la temperatura mitjana $T(t)$ de la barnilla a l'instant $t = 3$. [Ind.: calculeu primer $T'(t)$.]

*(a) $45/2$ (b) $27/2$ (c) 15 (d) 9 (e) cap de les anteriors

Solució: La temperatura mitjana és $T(t) = \frac{1}{2} \int_0^2 u(x, t) \, dx$. Derivant,

$$T'(t) = \frac{1}{2} \int_0^2 u_t(x, t) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 u_{xx}(x, t) \, dx = \frac{1}{2} u_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2} (3t^2 + 4t),$$

on hem usat l'EDP i les condicions de contorn. Integrem, tenint en compte que $T(0) = 0$ per la condició inicial, obtenint

$$T(t) = \frac{1}{2} (t^3 + 2t^2) \text{ i per tant } T(3) = \frac{45}{2}.$$

7 Sigui $u(x, t)$ la solució de la següent equació d'ones per a una corda de longitud infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 4t^2 \cos x, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Digueu quan val $u(0, \pi)$. [Ind.: Trobeu primer una solució particular de l'EDP no homogènia de la forma $u_p(x, t) = (At^2 + B) \cos x$ i després feu el canvi de funció $w = u - u_p$.]

- (a) $\pi^2/2$ *(b) π^2 (c) $4\pi^2 - 16$ (d) $2\pi^2 - 8$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Una solució de l'EDP no homogènia és $u_p(x, t) = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \cos x$. Si fem $w = u - u_p$, llavors $w(x, t)$ ha de ser solució del problema següent:

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = \frac{1}{2} \cos x, & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per la fórmula de D'Alembert tenim: $w(x, t) = \frac{1}{4}(\cos(x + 2t) + \cos(x - 2t))$, d'on $u(0, \pi) = \pi^2$.

8 Considerem el següent problema de calor amb condicions de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 2\pi), t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + 3 \cos x, & x \in (0, 2\pi), \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Si $u(x, t)$ és la solució, trobeu el valor de $u(\pi, 1)$.

- (a) $1 + 3e^{-4}$ *(b) $1 - 3e^{-1}$ (c) $1 - 3e^{-9}$ (d) $1 - 3e^{-4}$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Suprimint la condició inicial (no homogènia) i buscant una solució del tipus $u(x, t) = X(x)T(t)$, obtenim el PVF $X'' = \lambda X$, $X'(0) = X'(2\pi) = 0$. Els valors propis són $\lambda_n = -(n/2)^2$, $n \geq 0$, i les funcions pròpies $X_n(x) = \cos(nx/2)$. Llavors obtenim $T'_n(t) = -(n/2)^2 T_n(t)$, i resulta $T_n(t) = e^{-(n/2)^2 t}$. La solució és una combinació $u(x, t) = \sum_{n \geq 0} d_n X_n(x) T_n(t)$ que compleixi $u(x, 0) = \sum_{n \geq 0} d_n \cos(nx/2) = 1 + 3 \cos x$. Per tant, $d_0 = 1$, $d_2 = 3$, i la resta de coeficients són nuls. Llavors, $u(x, t) = 1 + 3 \cos x \cdot e^{-t}$, i per tant $u(\pi, 1) = 1 - 3e^{-1}$.
