

1 Sigui $u(x, t)$ una funció tal que

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_x(1, t) = \frac{1}{(1+t)^2}, & t \geq 0, \end{cases}$$

Si definim la funció $T(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$, calculeu l'increment $T(1) - T(0)$.

Ind.: Calculeu $T'(t)$ sense necessitat de trobar la solució.

Solució:

Calculem:

$$T'(t) = \int_0^1 u_t(x, t) dx = \int_0^1 a u_{xx}(x, t) dx = a [u_x(x, t)]_{x=0}^{x=1} = \frac{a}{(1+t)^2}.$$

Per tant,

$$T(1) - T(0) = \int_0^1 T'(t) dt = \int_0^1 \frac{a}{(1+t)^2} dt = a \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{a}{2}.$$

2 Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, corresponent a una corda vibrant infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = ax^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 15\pi \sin(\pi x/2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculeu $u(1, 1)$.

Solució:

Aplicant la fórmula de D'Alembert,

$$u(x, t) = \frac{a}{2} ((x+ct)^2 + (x-ct)^2) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} 15\pi \sin(\pi y/2) dy = a(x^2 + c^2 t^2) - \frac{15}{c} \left(\cos \frac{\pi(x+ct)}{2} - \cos \frac{\pi(x-ct)}{2} \right).$$

Llavors,

$$u(1, 1) = a(1+c^2) - \frac{15}{c} \left(\cos \frac{\pi(1+c)}{2} - \cos \frac{\pi(1-c)}{2} \right) = a(1+c^2) + \frac{30 \sin(\pi c/2)}{c}.$$

3 Considerem el problema següent per a l'equació de la calor no homogènia,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = b \cos(x/a), & 0 < x < 2a\pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = bx + \cos(3x/2a), & 0 < x < 2a\pi, \\ u_x(0, t) = u_x(2a\pi, t) = b, & t > 0. \end{cases}$$

Per homogeneïtzar-la, escollim una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP que també satisfaci les condicions de contorn i que, a més, compleixi $u_p(0) = 0$. Escrivint $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t)$, quina és la condició inicial per a la nova funció incògnita $v(x, t)$?

Solució:

Imposant que la solució particular satisfaci l'EDP, $-4u_p'' = b \cos(x/a)$, obtenim $u_p(x) = \frac{a^2 b}{4} \cos(x/a) + c_1 x + c_2$, on c_1, c_2 són constants arbitràries. Imposant ara les condicions de contorn, $u_p'(0) = u_p'(2a\pi) = b$, resulta $c_1 = b$. A més, si volem $u_p(0) = 0$ hem de tenir $c_2 = -a^2 b/4$. Així, tenim $u_p(x) = \frac{a^2 b}{4} (\cos(x/a) - 1) + bx$, i la nova condició inicial és

$$v(x, 0) = bx + \cos(3x/2a) - u_p(x) = \frac{a^2 b}{4} (1 - \cos(x/a)) + \cos(3x/2a).$$

- 4** Sigui $u(x, y)$ la solució del següent problema al rectangle $\Omega = [0, a\pi] \times [0, b\pi]$, consistent en l'equació de Laplace amb condicions de contorn mixtes:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_y(x, 0) = u_y(x, b\pi) = 0 \\ u(0, y) = 0, \quad u(a\pi, y) = \cos \frac{ky}{b} \end{cases}$$

Calculeu $u(a\pi/2, b\pi/2)$.

Ind.: $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$

Solució:

Suprimint la darrera condició de contorn (la no homogènia) i aplicant separació de variables $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, obtenim el PVF $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$, $Y'(0) = Y'(b\pi) = 0$, més l'EDO $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ amb la condició $X(0) = 0$. El PVF té com a valors propis $\lambda_n = -(n/b)^2$, $n \geq 0$, i les funcions pròpies associades són $Y_n(y) = \cos(ny/b)$. Substituint a l'altra EDO i imposant la condició corresponent, obtenim $X_n(x) = \sinh(nx/b)$. Amb això obtenim els modes normals $u_n(x, y) = \sinh(nx/b) \cdot \cos(ny/b)$, i qualsevol sèrie convergent $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u_n(x, y)$ és també solució del problema homogeni. Imposant ara la condició no homogènia $u(a\pi, y) = \cos(ky/b)$ que havíem suprimit, obtenim $d_k = 1/\sinh(ka\pi/b)$ i $d_n = 0$ per a $n \neq k$. Amb això, la solució és $u(x, y) = d_k \sinh(kx/b) \cdot \cos(ky/b)$, i per tant $u(a\pi/2, b\pi/2) = \frac{\sinh(k\pi a/2b)}{\sinh(k\pi a/b)} \cos(k\pi/2) = \frac{\cos(k\pi/2)}{2 \cosh(k\pi a/2b)}$.

- 5** Considerem, sobre el semiplà $x \geq 0$, un filferro donat per l'equació $x = a - y^2$ (essent $a > 0$), amb densitat a cada punt igual a la distància a l'eix x . Calculeu-ne la massa.

Solució:

Prenem la parametrització $\sigma(y) = (a - y^2, y)$, $y \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$. Tenim $\|\sigma'(y)\| = \sqrt{4y^2 + 1}$, i la densitat és $\rho(x, y) = |y|$. Per tant,

$$\text{massa} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |y| \sqrt{4y^2 + 1} dy = 2 \int_0^{\sqrt{a}} y \sqrt{4y^2 + 1} dy = \frac{1}{6} ((4y^2 + 1)^{3/2}) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{6} \left((4a + 1)^{3/2} - 1 \right).$$

- 6** Calculeu el centre geomètric de la part de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que queda per damunt del pla $z = b$.

Solució:

Per simetria axial de S , el centre geomètric es troba sobre l'eix vertical: $\bar{x} = \bar{y} = 0$, i només cal determinar-ne la tercera component, $\bar{z} = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S z dS$. Hem de parametritzar S i veure quin és el domini.

L'esfera talla el pla per una circumferència de radi $R = \sqrt{a^2 - b^2}$. La projecció de S sobre el pla (x, y) és el disc $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$, i S és la part de la gràfica de la funció $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ que té aquest domini D . L'element de superfície ve donat per $\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$. Calculem, fent un canvi a polars:

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2\pi a \int_0^R \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^R \\ &= 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - R^2}) = 2\pi a(a - b), \\ \int_S z dS &= \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \text{Area}(D) = \pi a R^2 = \pi a(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Per tant, $\bar{z} = \frac{\pi a(a^2 - b^2)}{2\pi a(a - b)} = \frac{a + b}{2}$.

- 7** Calculeu el flux del camp $\vec{F}(x, y, z) = (y^3, x, 3)$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z) : 2x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \sigma(y + z - b) \geq 0\}$ orientada per la normal exterior (essent $b > 0, \sigma = \pm 1$).

Solució:

Es tracta de la part d'un el·lipsoide que queda per damunt o per sota d'un pla (depenent de σ). No és una superfície tancada però podem tancar-la afegint un tros d'aquest pla,

$$S_1 = \{(x, y, z) : y + z = b, 2x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\} = \{(x, y, z) : z = b - y, x^2 + y^2 - by \leq 0\} \\ = \{(x, y, z) : z = b - y, x^2 + (y - b/2)^2 \leq (b/2)^2\},$$

que és la gràfica de $z = b - y$ sobre el domini $D = \{(x, y) : x^2 + (y - b/2)^2 \leq (b/2)^2\}$. Així, la unió $S \cup S_1$ és la frontera d'un sòlid. Orientem S_1 per la normal exterior al sòlid: cap avall si $\sigma = 1$ i cap amunt si $\sigma = -1$.

Apliquem el teorema de Gauss. Com que $\text{div } \vec{F} = 0$, el flux total sortint per la frontera del cos és 0, i per tant flux sortint per S és

$$\int_{S^+} \langle F, d\mathbf{S} \rangle = - \int_{S_1^+} \langle F, d\mathbf{S} \rangle = \sigma \int_D \langle (y^3, x, 3), (0, 1, 1) \rangle dx dy = \sigma \int_D (x + 3) dx dy = \sigma \cdot 3 \text{Area}(D) = \sigma \frac{3\pi b^2}{4},$$

on hem usat que sobre S_1 tenim el vector normal $(-z_x, -z_y, 1) = (0, 1, 1)$, però hem de canviar el signe del flux si aquest vector normal no té l'orientació requerida. També hem usat que la integral de x sobre D és 0 per simetria.

- 8** Considerem el tros d'el·lipsoide definit per

$$S = \left\{ (x, y, z) : x^2 + \frac{2y^2}{3} + z^2 = 1, \sigma y \leq b \right\}$$

(essent $0 < b < \sqrt{3/2}$ i $\sigma = \pm 1$), orientat per la normal exterior. Donat el camp vectorial $\vec{F} = (z, y, -x)$, calculeu el flux del camp $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$ a través de S .

Solució:

Considerem la vora

$$\partial S = \left\{ (x, y, z) : \sigma y = b, x^2 + \frac{2y^2}{3} + z^2 = 1 \right\} = \left\{ (x, y, z) : \sigma y = b, x^2 + z^2 = 1 - \frac{2b^2}{3} \right\} = \partial T,$$

essent

$$T = \left\{ (x, y, z) : \sigma y = b, x^2 + z^2 \leq 1 - \frac{2b^2}{3} \right\}.$$

És a dir, les superfícies S i T tenen la mateixa vora, i l'orientació serà compatible si orientem T (un cercle de radi $\sqrt{1 - 2b^2/3}$) pel vector $\vec{N}_T = (0, -\sigma, 0)$. Aplicant dos cops el teorema de Stokes i usant que $\vec{G} = (0, 2, 0)$,

$$\int_{S^+} \langle \vec{G}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial S^+} \langle \vec{F}, d\ell \rangle = \int_{T^+} \langle \vec{G}, d\mathbf{S} \rangle = \int_T \langle \vec{G}, \vec{N}_T \rangle dS = -2\sigma \text{Area}(T) = -\sigma\pi \left(2 - \frac{4b^2}{3} \right).$$

- 9** Estudieu l'estabilitat dels dos punts d'equilibri de l'EDO $x' = \sigma(x + 1)^k (x - 2)^m$ (essent $k, m \geq 1, \sigma = \pm 1$).

Solució:

Els punts d'equilibri són -1 i 2 . Per decidir la seva estabilitat, mirem el signe de $f(x) = \sigma(x + 1)^k (x - 2)^m$ als dos costats de cada punt d'equilibri, depenent de si els exponents k i m són senars o parells, i de si $\sigma = 1$ o $\sigma = -1$.

- * Quan un exponent és parell, el punt corresponent és sempre inestable no repulsor.
- * Quan un exponent és senar, el punt corresponent és repulsor si f passa de negativa a positiva en aquest punt, i atractor si f passa de positiva a negativa en aquest punt.

10 Donat el problema de valors inicials $X' = \begin{pmatrix} -a-1 & 1 \\ -a^2 & a-1 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu $X(1)$.

.....

Solució:

La matriu A té -1 com a valor propi doble i no diagonalitza. Per trobar una matriu fonamental, busquem vectors u, v tals que $Au = -u + v$, $Av = -v$. Prenem $v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ (vector propi), i escollim u com una solució del sistema $(A + I)u = v$ per exemple $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Així obtenim un conjunt fonamental de solucions $X^{(1)}(t) = e^{-t}(u + tv)$, $X^{(2)}(t) = e^{-t}v$, i la matriu fonamental associada és $\Phi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1+at & a \end{pmatrix}$. Imposant la condició inicial a la solució general $X(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, resulta $c_1 = 1 - a$, $c_2 = 1$. Per a la solució obtinguda, es compleix que $X(1) = e^{-1} \begin{pmatrix} 2-a \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}$.

11 Considerem el sistema lineal 2D, donat per la matriu $\begin{pmatrix} \sigma(\alpha - k) & \sigma(2\alpha - 2k - 1) \\ \sigma & \sigma(\alpha - k) \end{pmatrix}$ (amb $k \in \mathbb{R}$ i $\sigma = \pm 1$ fixades), essent $\alpha \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Trobeu els valors de α per als quals aquest sistema és un focus, i en quin sentit giren les trajectòries.

.....

Solució:

Calculem la traça, el determinant i el discriminant, $T = 2\sigma(\alpha - k)$, $D = (\alpha - k - 1)^2$, $\Delta = 4(2\alpha - 2k - 1)$. Tindrem un focus quan $T \neq 0$, $D > 0$ i $\Delta < 0$, és a dir, quan $\alpha < k + 1/2$ però $\alpha \neq k$. El sentit de gir és antihorari si $\sigma = 1$, i horari si $\sigma = -1$.

12 Considerem el sistema d'EDOs següent, on $p > 0$ és un paràmetre (i suposem $a > 1/8$),

$$\begin{cases} x' = x + 4ay - px^3 \\ y' = -2x - y + x^3 \end{cases}$$

Per determinar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri d'aquest sistema, usem una funció de Lyapunov del tipus $V(x, y) = x^2 + xy + cy^2$ (la qual és definida positiva si $c > 1/4$), escollint c adequadament. Quin ha de ser el valor de p perquè el mètode de Lyapunov permeti assegurar que l'origen és estable?

.....

Solució:

Notem que el sistema linealitzat és un centre si $a > 1/8$, i per tant el mètode de linealització no decideix. Usant el mètode de Lyapunov, calculem:

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = (2x + y)(x + 4ay - px^3) + (x + 2cy)(-2x - y + x^3) = (4a - 2c)(2xy + y^2) + (1 - 2p)x^4 + (2c - p)x^3y.$$

Escollint $c = 2a > 1/4$, obtenim

$$W(x, y) = (1 - 2p)x^4 + (4a - p)x^3y,$$

la qual és semidefinida negativa si $p = 4a$, ja que llavors $1 - 2p = 1 - 8a < 0$. En aquest cas, podem assegurar que l'origen és estable.

[Nota: Si $c \neq 2a$, no és possible que W sigui definida ni semidefinida, ja que pren signes diferents en punts tan propers a l'origen com vulguem: $W(0, y) = (4a - 2c)y^2$, $W(x, -x) = -(4a - 2c)x^2 + (1 - p - 2c)x^4$.]
